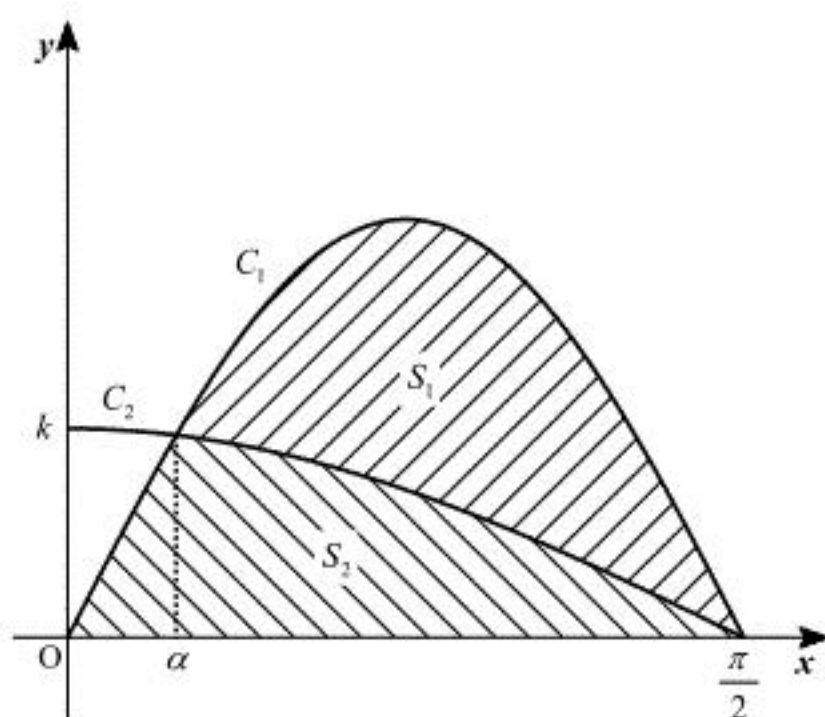


1



(1)

$$\begin{aligned}\sin 2x &= k \cos x \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= k \cos x \\ \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x = 0, \sin x &= \frac{k}{2}\end{aligned}$$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ であるので,

$$\sin \alpha = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2 \sin \alpha$$

である。

(答) $k = 2 \sin \alpha$

(2)

図より, S_1 は,

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k \cos x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} - k \sin x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - k(1 - \sin \alpha) \\ &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - 2 \sin \alpha (1 - \sin \alpha) \quad (\because k = 2 \sin \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \\ &= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 1 \\ &= (1 - \sin \alpha)^2\end{aligned}$$

である。

(答) $S_1 = (1 - \sin \alpha)^2$

(3)

図より,

$$S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

である。よって, これと(2)の結果とから

$$\begin{aligned}S_1 &= 2S_2 \\ \Leftrightarrow 3S_1 &= 2(S_1 + S_2) \\ \Leftrightarrow 3(1 - \sin \alpha)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 1 - \sin \alpha &= \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\because 1 - \sin \alpha > 0) \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow k = 2 \sin \alpha &= 2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $k = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}$

(1)

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると,

$$\log f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

であり, この両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} f(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)

$$g(x) = x - (1+x)\log(1+x) \quad (x > 0)$$

とおくと,

$$g'(x) = 1 - \left\{ \log(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} \right\} = -\log(1+x)$$

より, $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...
$g'(x)$	(0)	-
$g(x)$	(0)	$\searrow$

よって, $g(x) < 0$ であり,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}} < 0$$

なので, 関数 $f(x)$ は $x > 0$ の範囲で単調減少し, $0 < x_1 < x_2$ のとき, $f(x_1) > f(x_2)$ である。

(証明終)

(3)

(2)の結果より,

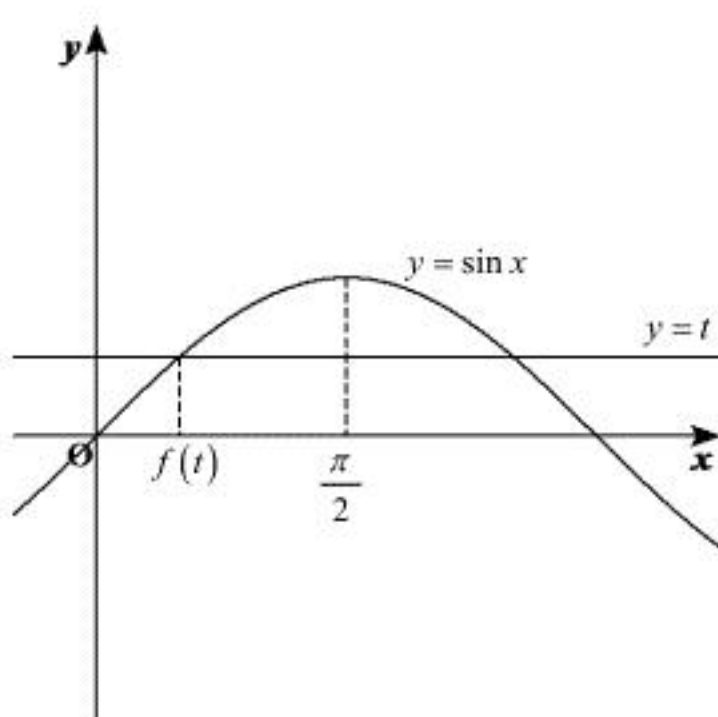
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{100}\right) &> f\left(\frac{1}{99}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{100} &> \left(\frac{100}{99}\right)^{99} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{101} &> \left(\frac{101}{100}\right)^{100} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99} \quad \left(\because \frac{101}{100} > 1\right) \end{aligned}$$

よって, $\left(\frac{101}{100}\right)^{101} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99}$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{101}{100}\right)^{101} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99}$$

3

- (1) $0 \leq t \leq 1$ のとき、関数 $y = \sin x$, $y = t$ のグラフは次図のようになる。



よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t| dx &= -\int_0^{f(t)} (\sin x - t) dx + \int_{f(t)}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - t) dx \\ &= -[-\cos x - tx]_0^{f(t)} + [-\cos x - tx]_{f(t)}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\cos f(t) + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \\ &= 2\sqrt{1 - \sin^2 f(t)} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \quad \left(\because 0 < f(t) < \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{1 - t^2} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t| dx = 2\sqrt{1 - t^2} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1$

- (2) (1)より、

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t| dx - 2tf(t) + \frac{3}{2}\pi t \\ &= \left\{ 2\sqrt{1 - t^2} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \right\} - 2tf(t) + \frac{3}{2}\pi t \\ &= 2\sqrt{1 - t^2} + \pi t - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $g(t) = 2\sqrt{1 - t^2} + \pi t - 1$

- (3) (2)より、

$$g'(t) = -\frac{2t}{\sqrt{1 - t^2}} + \pi$$

であるので、 $0 \leq t \leq 1$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2t}{\sqrt{1 - t^2}} &= \pi \\ \Leftrightarrow 4t^2 &= \pi^2(1 - t^2) \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \quad (\because t \geq 0) \end{aligned}$$

となり、 $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		↗	極大	↘	

よって、 $g(t)$ の最大値は、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}\right) &= 2\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}\right)^2} + \pi \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} - 1 \\ &= \frac{\pi^2 + 4}{\sqrt{\pi^2 + 4}} - 1 \\ &= \sqrt{\pi^2 + 4} - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\sqrt{\pi^2 + 4} - 1$