

(1)

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{{}_6C_1 \cdot {}_nC_2}{{}_{n+6}C_3} \\
 &= \frac{6 \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}}{\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{3 \cdot 2 \cdot 1}} \\
 &= \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad P_n = \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 P_n &> P_{n+1} \\
 \Leftrightarrow \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)} &> \frac{18(n+1)n}{(n+7)(n+6)(n+5)} \\
 \Leftrightarrow (n-1)(n+7) &> (n+1)(n+4) \\
 \Leftrightarrow n^2 + 6n - 7 &> n^2 + 5n + 4 \\
 \Leftrightarrow n &> 11
 \end{aligned}$$

よって、 n は自然数であるから、 $P_n > P_{n+1}$ を満たす最小の n は、 $n = 12$ である。

$$(\text{答}) \quad n = 12$$

(3)

(2)より、

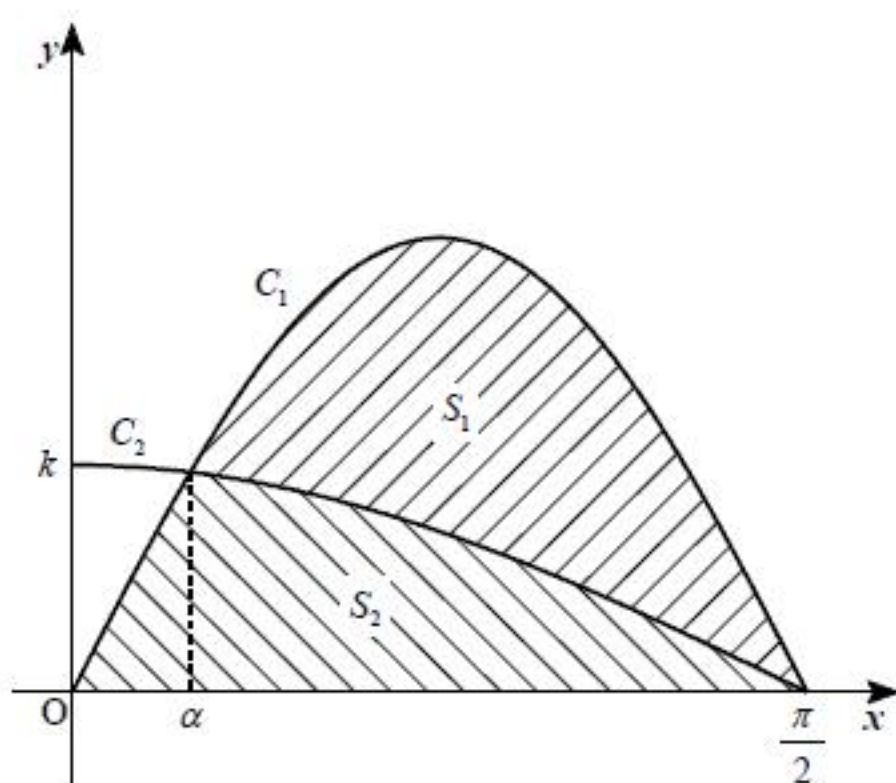
$$\begin{cases} P_n < P_{n+1} \Leftrightarrow n < 11 \\ P_n = P_{n+1} \Leftrightarrow n = 11 \\ P_n > P_{n+1} \Leftrightarrow n > 11 \end{cases}$$

となるので、

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_{11} = P_{12} > P_{13} > \cdots$$

となり、 P_n を最大にする n の値は、 $n = 11, 12$ である。

$$(\text{答}) \quad n = 11, 12$$



(1)

$$\begin{aligned}
 \sin 2x &= k \cos x \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= k \cos x \\
 \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - k) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x = 0, \sin x &= \frac{k}{2}
 \end{aligned}$$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ であるので,

$$\sin \alpha = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2 \sin \alpha$$

である。

(答) $k = 2 \sin \alpha$

(2)

図より, S_1 は,

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k \cos x) dx \\
 &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} - k \sin x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - k(1 - \sin \alpha) \\
 &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - 2 \sin \alpha (1 - \sin \alpha) \quad (\because k = 2 \sin \alpha) \\
 &= \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \\
 &= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 1 \\
 &= (1 - \sin \alpha)^2
 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_1 = (1 - \sin \alpha)^2$

(3)

図より,

$$S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

である。よって, これと(2)の結果とから

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 2S_2 \\
 \Leftrightarrow 3S_1 &= 2(S_1 + S_2) \\
 \Leftrightarrow 3(1 - \sin \alpha)^2 &= 2 \\
 \Leftrightarrow 1 - \sin \alpha &= \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\because 1 - \sin \alpha > 0) \\
 \Leftrightarrow \sin \alpha &= 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \\
 \Leftrightarrow k = 2 \sin \alpha &= 2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

である。

(答) $k = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}$

(1)

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると、

$$\log f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

であり、この両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} f(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)

$$g(x) = x - (1+x)\log(1+x) \quad (x > 0)$$

とおくと、

$$g'(x) = 1 - \left\{ \log(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} \right\} = -\log(1+x)$$

より、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\dots$
$g'(x)$	(0)	$-$
$g(x)$	(0)	$\searrow$

よって、 $g(x) < 0$ であり、

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}} < 0$$

なので、関数 $f(x)$ は $x > 0$ の範囲で単調減少し、 $0 < x_1 < x_2$ のとき、 $f(x_1) > f(x_2)$ である。

(証明終)

(3)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{100}\right) &> f\left(\frac{1}{99}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{100} &> \left(\frac{100}{99}\right)^{99} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{101} &> \left(\frac{101}{100}\right)^{100} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99} \quad \left(\because \frac{101}{100} > 1\right) \end{aligned}$$

よって、 $\left(\frac{101}{100}\right)^{101} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99}$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{101}{100}\right)^{101} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99}$$