

1

(1)

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると,

$$\log f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

であり, この両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} f(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)

$$g(x) = x - (1+x)\log(1+x) \quad (x > 0)$$

とおくと,

$$g'(x) = 1 - \left\{ \log(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} \right\} = -\log(1+x)$$

より, $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...
$g'(x)$	(0)	-
$g(x)$	(0)	$\searrow$

よって, $g(x) < 0$ であり,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x)} (1+x)^{\frac{1}{x}} < 0$$

なので, 関数 $f(x)$ は $x > 0$ の範囲で単調減少し, $0 < x_1 < x_2$ のとき, $f(x_1) > f(x_2)$ である。

(証明終)

(3)

(2)の結果より,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{100}\right) &> f\left(\frac{1}{99}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{100} &> \left(\frac{100}{99}\right)^{99} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{101} &> \left(\frac{101}{100}\right)^{100} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99} \quad \left(\because \frac{101}{100} > 1\right) \end{aligned}$$

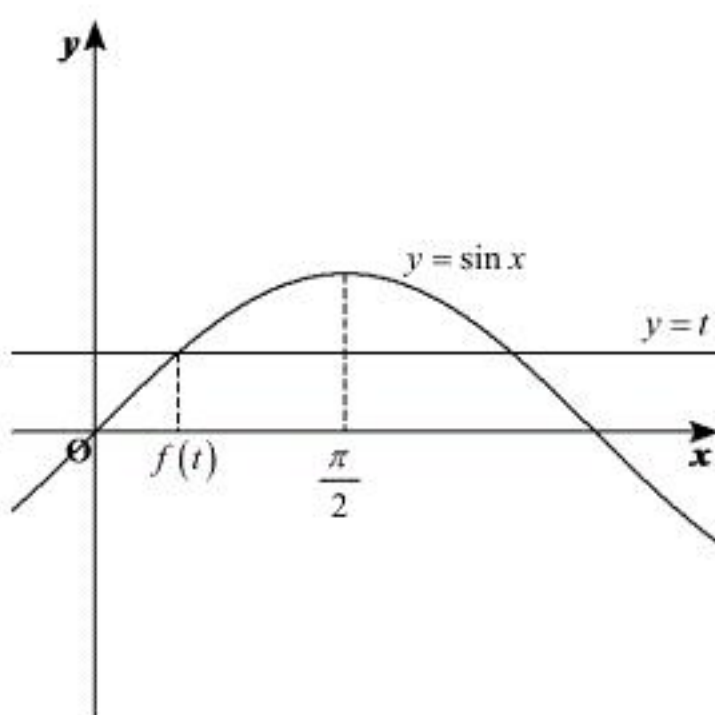
よって, $\left(\frac{101}{100}\right)^{101} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99}$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{101}{100}\right)^{101} > \left(\frac{100}{99}\right)^{99}$$

2

(1)

$0 \leq t \leq 1$ のとき、関数 $y = \sin x$, $y = t$ のグラフは次図のようになる。



よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t| dx &= -\int_0^{f(t)} (\sin x - t) dx + \int_{f(t)}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - t) dx \\ &= -[-\cos x - tx]_0^{f(t)} + [-\cos x - tx]_{f(t)}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \cos f(t) + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \\ &= 2\sqrt{1 - \sin^2 f(t)} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \quad \left(\because 0 < f(t) < \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{1 - t^2} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t| dx = 2\sqrt{1 - t^2} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t| dx - 2tf(t) + \frac{3}{2}\pi t \\ &= \left\{ 2\sqrt{1 - t^2} + 2tf(t) - \frac{\pi}{2}t - 1 \right\} - 2tf(t) + \frac{3}{2}\pi t \\ &= 2\sqrt{1 - t^2} + \pi t - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad g(t) = 2\sqrt{1 - t^2} + \pi t - 1$$

(3)

(2)より、

$$g'(t) = -\frac{2t}{\sqrt{1 - t^2}} + \pi$$

であるので、 $0 \leq t \leq 1$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2t}{\sqrt{1 - t^2}} &= \pi \\ \Leftrightarrow 4t^2 &= \pi^2 (1 - t^2) \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \quad (\because t \geq 0) \end{aligned}$$

となり、 $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		↗	極大	↘	

よって、 $g(t)$ の最大値は、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}\right) &= 2\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}\right)^2} + \pi \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} - 1 \\ &= \frac{\pi^2 + 4}{\sqrt{\pi^2 + 4}} - 1 \\ &= \sqrt{\pi^2 + 4} - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{\pi^2 + 4} - 1$$

3

(1)

立体 P_x, P_y は、共に底面の円の半径が $\sqrt{2}$ 、高さが1の円柱であり、 P_x, P_y はそれぞれ、次の不等式で表される。

$$P_x: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y^2 + z^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$P_y: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ x^2 + z^2 \leq 2 \end{cases}$$

よって、平面 $z=t$ で切ったときにできる切り口 R_x, R_y の方程式はそれぞれ、

$$R_x: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y^2 \leq 2-t^2 \end{cases}$$

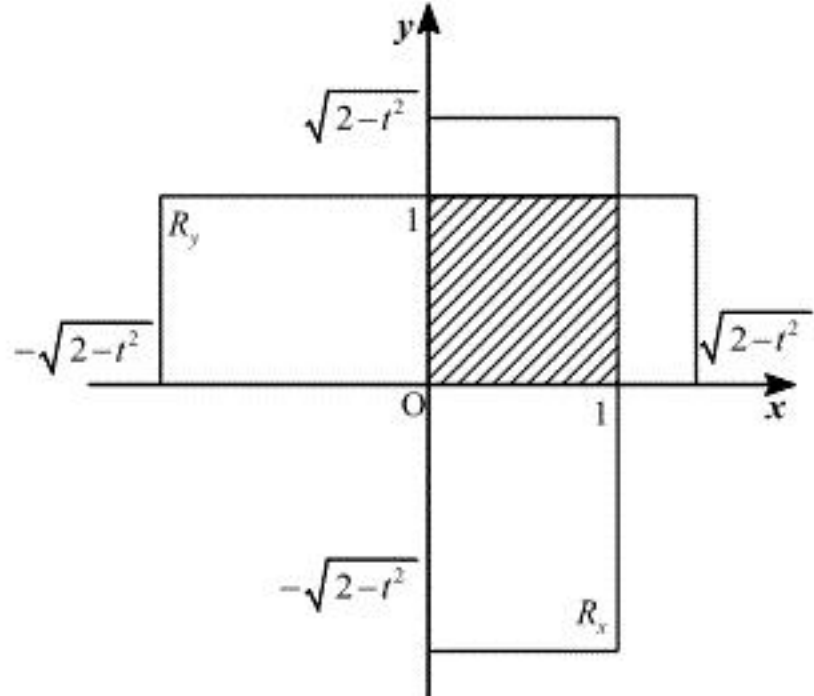
$$R_y: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ x^2 \leq 2-t^2 \end{cases}$$

で表される。よって、切り口 R_x, R_y は共に、辺の長さが $2\sqrt{2-t^2}$ および1である長方形なので、

R_x, R_y の面積は共に、 $1 \cdot 2\sqrt{2-t^2} = 2\sqrt{2-t^2}$ である。

[1] $1 < \sqrt{2-t^2}$ 、すなわち、 $|t| < 1$ のとき

R_x, R_y の共通部分は次図の斜線部である。



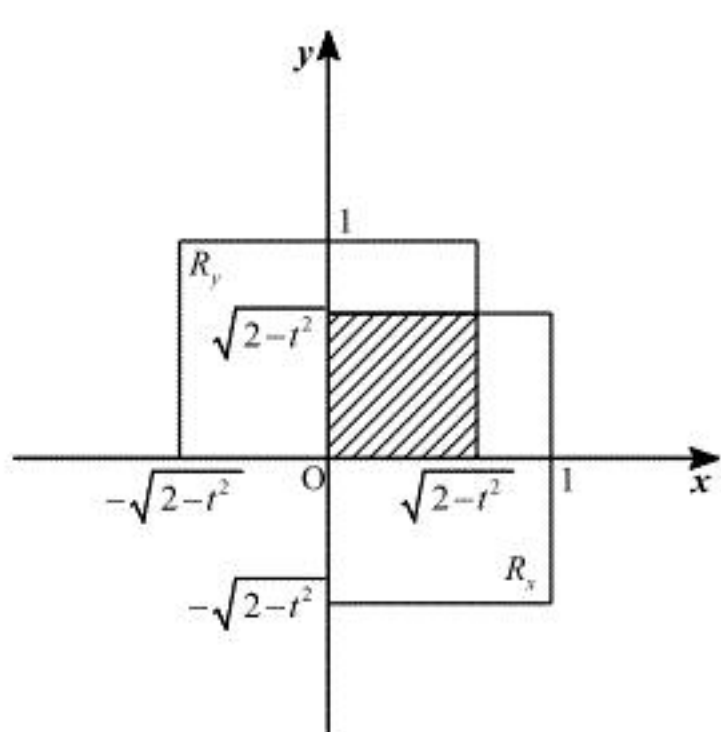
よって、この面積は、

$$1 \cdot 1 = 1$$

である。

[2] $1 \geq \sqrt{2-t^2}$ 、すなわち、 $1 \leq |t| \leq \sqrt{2}$ のとき

R_x, R_y の共通部分は次図の斜線部である。



よって、この面積は、

$$\sqrt{2-t^2} \cdot \sqrt{2-t^2} = 2-t^2$$

である。

以上[1],[2]より、 R_x と R_y の共通部分の面積は、

$$|t| < 1 \text{ のとき, } 1$$

$$1 \leq |t| \leq \sqrt{2} \text{ のとき, } 2-t^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad (R_x \text{ の面積}) = (R_y \text{ の面積}) = 2\sqrt{2-t^2}$$

$$(R_x \text{ と } R_y \text{ の共通部分の面積}) = \begin{cases} 1 & (|t| < 1) \\ 2-t^2 & (1 \leq |t| \leq \sqrt{2}) \end{cases}$$

(2)

(1)の結果を用いると、

$$S(t) = (R_x \text{ の面積}) + (R_y \text{ の面積}) - (R_x \text{ と } R_y \text{ の共通部分の面積})$$

$$= \begin{cases} 4\sqrt{2-t^2} - 1 & (|t| < 1) \\ 4\sqrt{2-t^2} - 2 + t^2 & (1 \leq |t| \leq \sqrt{2}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S(t) = \begin{cases} 4\sqrt{2-t^2} - 1 & (|t| < 1) \\ 4\sqrt{2-t^2} - 2 + t^2 & (1 \leq |t| \leq \sqrt{2}) \end{cases}$$

(3)

$S(t)$ は t の偶関数なので、立体 Q の体積は、

$$2 \int_0^{\sqrt{2}} S(t) dt$$

である。 $\int_0^{\sqrt{2}} S(t) dt$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} S(t) dt &= \int_0^1 (4\sqrt{2-t^2} - 1) dt + \int_1^{\sqrt{2}} (4\sqrt{2-t^2} - 2 + t^2) dt \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt - \int_0^1 dt + \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 2) dt \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt - 1 + \left[\frac{1}{3} t^3 - 2t \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt - \frac{4}{3} \sqrt{2} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。 $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt$ について、 $t = \sqrt{2} \sin \theta$ とおくと、

$$dt = \sqrt{2} \cos \theta d\theta$$

t	$0 \rightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-2\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、立体 Q の体積は、

$$2 \left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \sqrt{2} + \frac{2}{3} \right) = 4\pi - \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 4\pi - \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$$

【別解】

立体 Q の体積は、

$$(P_x \text{ の体積}) + (P_y \text{ の体積}) - (P_x \text{ と } P_y \text{ の共通部分の体積})$$

と表せる。 P_x と P_y は、共に底面の円の半径が $\sqrt{2}$ 、高さが1の円柱なので、

$$(P_x \text{ の体積}) = (P_y \text{ の体積}) = \pi (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = 2\pi$$

となる。また、 P_x と P_y の共通部分の体積は、(1)より、

$$\begin{aligned} 2 \left(\int_0^1 1 dt + \int_1^{\sqrt{2}} (2-t^2) dt \right) &= 2 \left(1 + \left[2t - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2 \left\{ 1 + 2(\sqrt{2}-1) - \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right\} \\ &= \frac{8\sqrt{2}-4}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 Q の体積は、

$$2\pi + 2\pi - \frac{8\sqrt{2}-4}{3} = 4\pi - \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4\pi - \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$$