

1

(1)

放物線 C と直線 ℓ はともに点 $(1, 0)$ を通るので、 $x=1$ での放物線 C の接線の傾きが求める m_0 である。 $f(x)=x^2-4x+3$ とおくと、

$$f'(x)=2x-4$$

であるから、

$$m_0=f'(1)=2-4=-2$$

となる。

(答) $m_0=-2$

(2)

放物線 C と直線 ℓ の交点の x 座標は、①より、

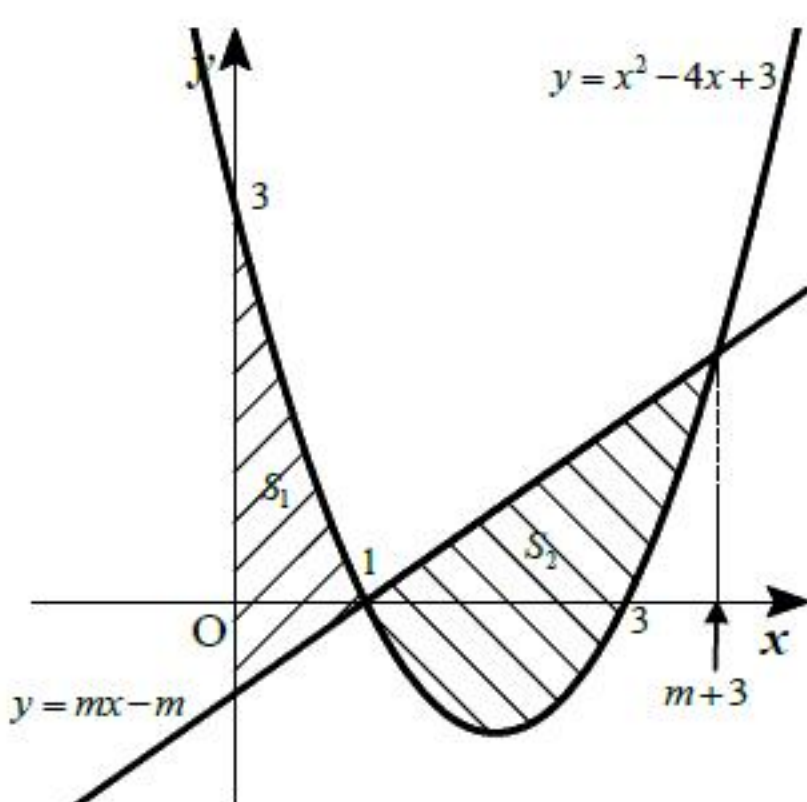
$$x^2-4x+3=mx-m$$

$$\Leftrightarrow x^2-(m+4)x+m+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\{x-(m+3)\}=0$$

$$\therefore x=1, m+3$$

である。 $m>m_0=-2$ より、 $m+3>1$ であり、以下のようなグラフとなる。



したがって、求める面積は、それぞれ、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{(x^2-4x+3)-(mx-m)\} dx \\ &= \int_0^1 \{x^2-(m+4)x+m+3\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+4)x^2 + (m+3)x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(m+4) + m + 3 \\ &= \frac{1}{2}m + \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^{m+3} \{(mx-m)-(x^2-4x+3)\} dx \\ &= -\int_1^{m+3} (x-1)\{x-(m+3)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(m+3-1)^3 \\ &= \frac{1}{6}(m+2)^3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_1 = \frac{1}{2}m + \frac{4}{3}$, $S_2 = \frac{1}{6}(m+2)^3$

(3)

$$\begin{aligned} S(m) &= S_2 - 2S_1 \\ &= \frac{1}{6}(m+2)^3 - m - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} S'(m) &= \frac{1}{2}(m+2)^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 &= 0 \\ \therefore m &= -2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから、 $S(m)$ の $m>-2$ における増減表は次のようになる。

m	(-2)	$\dots$	$-2+\sqrt{2}$	$\dots$
$S'(m)$		$-$	0	$+$
$S(m)$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって、増減表より、 $f(m)$ は $m=-2+\sqrt{2}$ のとき最小値

$$\begin{aligned} S(-2+\sqrt{2}) &= \frac{1}{6}(-2+\sqrt{2}+2)^3 - (-2+\sqrt{2}) - \frac{8}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} + 2 - \sqrt{2} - \frac{8}{3} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}+2}{3} \end{aligned}$$

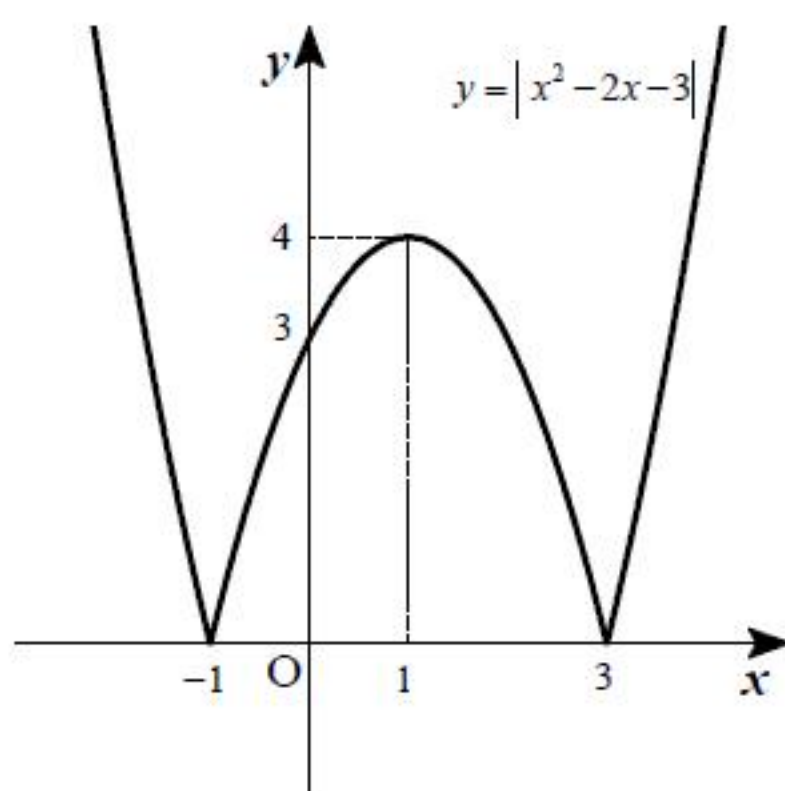
をとる。

(答) 最小値 $-\frac{2\sqrt{2}+2}{3}$ ($m=-2+\sqrt{2}$ のとき)

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= |x^2 - 2x - 3| \\
 &= |(x-1)^2 - 4| \\
 &= |(x+1)(x-3)|
 \end{aligned}$$

であるから、グラフは次のようになる。



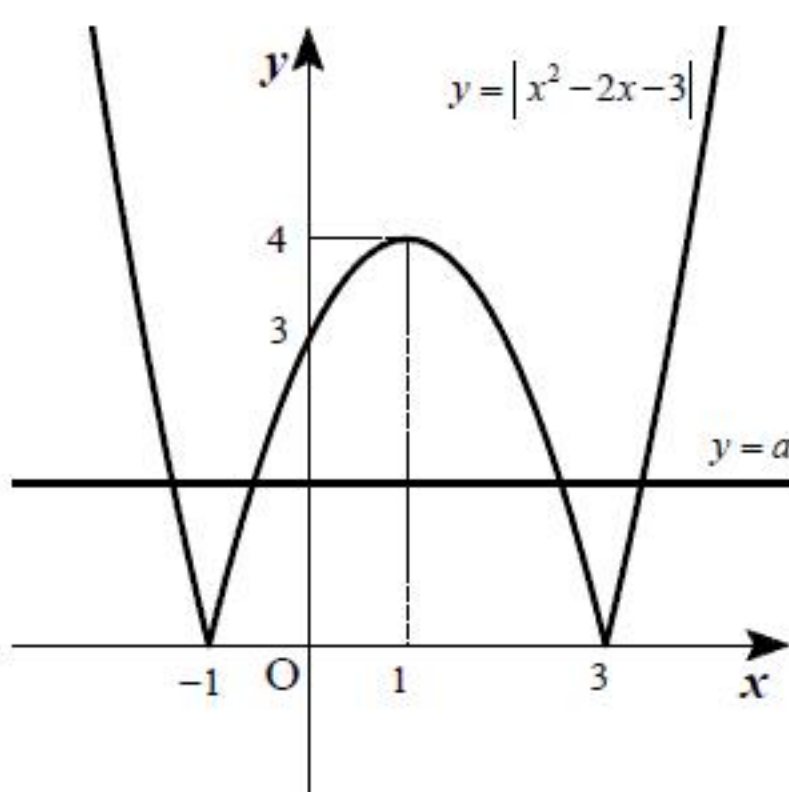
(答) 前図

(2)

方程式 $|x^2 - 2x - 3| = a$ の実数解の個数は、2つのグラフ

$$\begin{cases} y = |x^2 - 2x - 3| \\ y = a \end{cases}$$

の共有点の個数に等しい。



上図より、

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = 0, a > 4 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 4 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 0 < a < 4 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = 0, a > 4 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 4 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 0 < a < 4 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 ||x^2 - 2x - 3| - 6| &= 2 \\
 \Leftrightarrow |x^2 - 2x - 3| - 6 &= \pm 2 \\
 \Leftrightarrow |x^2 - 2x - 3| &= 4, 8
 \end{aligned}$$

である。ここで、(2)より、

$$|x^2 - 2x - 3| = 4 \text{ の解は } 3 \text{ 個}$$

$$|x^2 - 2x - 3| = 8 \text{ の解は } 2 \text{ 個}$$

であり、重複しないので、方程式 $||x^2 - 2x - 3| - 6| = 2$ の実数解の個数は 5 個となる。

(答) 5 個

(1)

$0^\circ < \theta < 90^\circ$, $\cos \theta = \sqrt{\frac{3}{5}}$ のとき,

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\sqrt{5}(\sin \theta + \cos \theta) - 5 \sin 2\theta}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right) - 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}}{2} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 6} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2\sqrt{6} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})(2\sqrt{6} + 1)}{(2\sqrt{6} - 1)(2\sqrt{6} + 1)} \\ &= \frac{12 + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + \sqrt{6}}{23} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{a} = \frac{12 + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + \sqrt{6}}{23}$$