

(1)

I の式を変形すると、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} e^x (\sin x)' dx \\ &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \\ &= -J \\ I + J &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。また、 J の式を変形すると、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} e^x (-\cos x)' dx \\ &= -\left[e^x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx \\ &= e^{\pi} + 1 + I \\ \Leftrightarrow J - I &= e^{\pi} + 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって①、②より、

$$\begin{cases} I = -\frac{e^{\pi} + 1}{2} \\ J = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} I = -\frac{e^{\pi} + 1}{2} \\ J = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{cases}$$

(2)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (a \cos x + b \sin x)^2 dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \int_0^{\pi} (a^2 \cos^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \sin^2 x) dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} a^2 + ab \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} b^2 \right) dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) a^2 - \frac{1}{2} ab \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) b^2 \right]_0^{\pi} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} a^2 + \frac{\pi}{2} b^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

であるから、 θ を実数として、

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \theta, \quad b = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \theta$$

とおける。このとき、(1)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (e^x - a \cos x - b \sin x)^2 dx &= \int_0^{\pi} \left\{ e^{2x} - 2e^x (a \cos x + b \sin x) + (a \cos x + b \sin x)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\pi} - 2aI - 2bJ + 1 \\ &= \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + (e^{\pi} + 1)(a - b) \\ &= \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} (e^{\pi} + 1)(\cos \theta - \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{\pi} + 1) \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$-1 \leq \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right) \leq 1$$

であるから、 $\int_0^{\pi} (e^x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$ の最大値は、

$$\frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{\pi} + 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{\pi} + 1)$$

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 7 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{3} > 0$$

であるから、 $f(x)$ は単調増加する。ここで、

$$f(-2) = -15 < 0$$

$$f(0) = 3 > 0$$

であるから、中間値の定理より、方程式 $f(x)$ はただ 1 つの実数解をもち、その実数解 α は $-2 < \alpha < 0$ を満たす。

(証明終)

(2)

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1} = x + \frac{-4x + 2}{x^2 + 1}$$

であるから、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{g(x) - x\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x + 2}{x^2 + 1} = 0$$

である。したがって、曲線 $y = g(x)$ の漸近線は、

$$y = x$$

となる。

(答) $y = x$

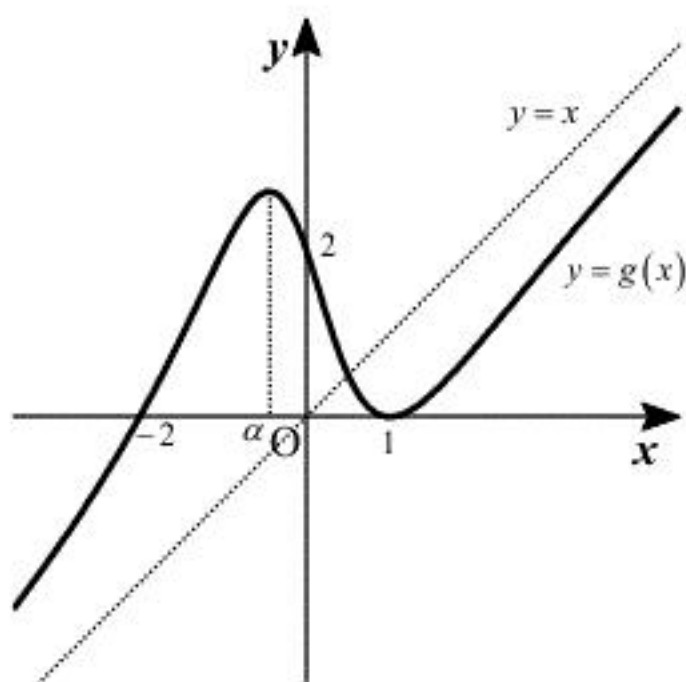
(3)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 1) - (x^3 - 3x + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 6x^2 - 4x - 3}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 7x + 3)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

であるから、(1)の結果と合わせ、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より、 $y = g(x)$ のグラフは次のようになる。



(答) 前図

3

(1)

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} (\cos \theta - 1) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \cdot \left(-2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= -\sin \frac{\theta}{2} \\ \vec{b} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \vec{a} \cdot \vec{v} = -\sin \frac{\theta}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{v} = \sin \frac{\theta}{2}$$

(2)

A, B を実数として、

$$\vec{x} = A\vec{a} + B\vec{v}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \vec{x} &\perp \vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow A|\vec{a}|^2 + B\vec{a} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= B \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また、 $\vec{x}$ は単位ベクトルなので、

$$\begin{aligned} |\vec{x}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (A\vec{a} + B\vec{v})^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow A^2 + 2AB\vec{a} \cdot \vec{v} + B^2|\vec{v}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow A^2 - 2AB \sin \frac{\theta}{2} + \frac{B^2}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} (\vec{b} - \vec{a})^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow A^2 - 2AB \sin \frac{\theta}{2} + \frac{B^2}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} (2 - 2 \cos \theta) &= 1 \\ \Leftrightarrow A^2 - 2AB \sin \frac{\theta}{2} + \frac{B^2}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow A^2 + B^2 - 2AB \sin \frac{\theta}{2} &= 1 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。①を②に代入すると、

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - 2AB \sin \frac{\theta}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow B^2 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow B^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow B^2 &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ \therefore B &= \pm \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

であり、したがって、①より、

$$(A, B) = \left(B \sin \frac{\theta}{2}, B \right) = \left(\pm \tan \frac{\theta}{2}, \pm \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) \quad (\text{複号同順})$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{b} &= (A\vec{a} + B\vec{v}) \cdot \vec{b} \\ &= A \cos \theta + B \sin \frac{\theta}{2} \\ &= A (\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

であるが、 $\vec{x} \cdot \vec{b} > 0$ であるから、 $0 < \theta < \pi$ より、

$$A = -\tan \frac{\theta}{2}$$

は不適である。したがって、

$$(A, B) = \left(\tan \frac{\theta}{2}, \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)$$

であるから、

$$\vec{x} = \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \vec{a} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \vec{v}$$

となる。

$$(答) \quad \vec{x} = \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \vec{a} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \vec{v}$$

(3)

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= -\sin \frac{\pi}{12} \\ &= -\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$