

(1)

 I の式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi} e^x (\sin x)' dx \\
 &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \\
 &= -J \\
 I + J &= 0 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

が得られる。また, J の式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\pi} e^x (-\cos x)' dx \\
 &= -\left[e^x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx \\
 &= e^{\pi} + 1 + I \\
 \Leftrightarrow J - I &= e^{\pi} + 1 \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

が得られる。したがって①, ②より,

$$\begin{cases} I = -\frac{e^{\pi} + 1}{2} \\ J = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} I = -\frac{e^{\pi} + 1}{2} \\ J = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{cases}$$

(2)

与式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} (a \cos x + b \sin x)^2 dx &= 1 \\
 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} (a^2 \cos^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \sin^2 x) dx &= 1 \\
 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} a^2 + ab \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} b^2 \right) dx &= 1 \\
 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) a^2 - \frac{1}{2} ab \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) b^2 \right]_0^{\pi} &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} a^2 + \frac{\pi}{2} b^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

であるから, θ を実数として,

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \theta, b = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \theta$$

とおける。このとき, (1) の結果を用いると,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} (e^x - a \cos x - b \sin x)^2 dx &= \int_0^{\pi} \left\{ e^{2x} - 2e^x (a \cos x + b \sin x) + (a \cos x + b \sin x)^2 \right\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\pi} - 2aI - 2bJ + 1 \\
 &= \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + (e^{\pi} + 1)(a - b) \\
 &= \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} (e^{\pi} + 1)(\cos \theta - \sin \theta) \\
 &= \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{\pi} + 1) \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right)
 \end{aligned}$$

である。ここで,

$$-1 \leq \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right) \leq 1$$

であるから, $\int_0^{\pi} (e^x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$ の最大値は,

$$\frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{\pi} + 1)$$

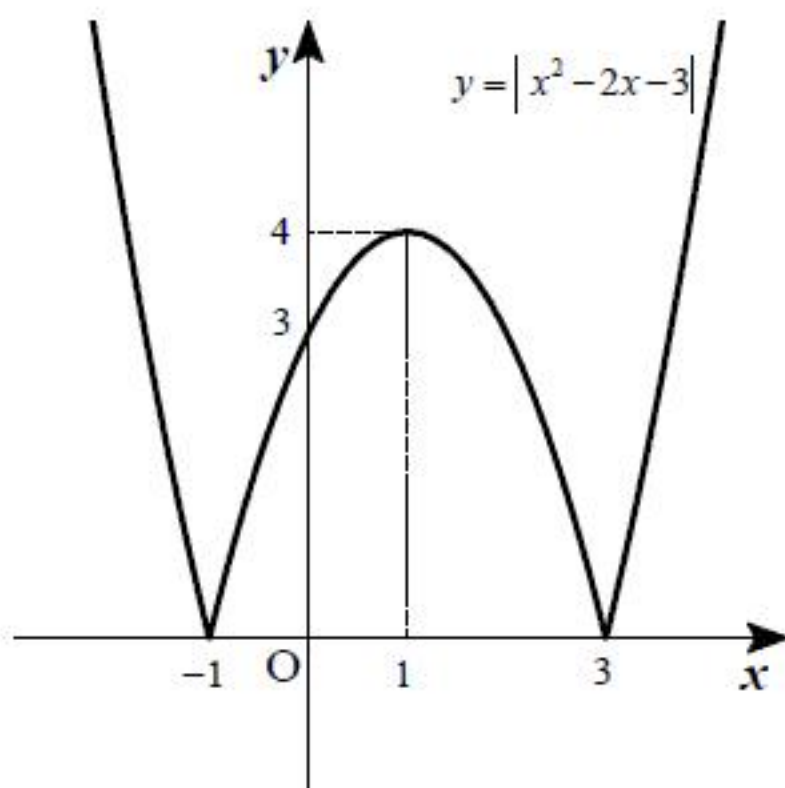
となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} e^{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{\pi} + 1)$$

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= |x^2 - 2x - 3| \\
 &= |(x+1)(x-3)| \\
 &= |(x-1)^2 - 4|
 \end{aligned}$$

であるので、グラフは次のようになる。



(答) 前図

(2)

k を実数とすると、方程式 $|x^2 - 2x - 3| = k$ の実数解の個数は、(1)のグラフより、

$$\begin{cases}
 k < 0 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\
 k = 0, k > 4 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\
 k = 4 \text{ のとき } 3 \text{ 個} \\
 0 < k < 4 \text{ のとき } 4 \text{ 個}
 \end{cases}$$

である。ここで、方程式 $||x^2 - 2x - 3| - a| = 2$ を変形すると、

$$\begin{aligned}
 &||x^2 - 2x - 3| - a| = 2 \\
 \Leftrightarrow &|x^2 - 2x - 3| - a = \pm 2 \\
 \Leftrightarrow &|x^2 - 2x - 3| = a \pm 2
 \end{aligned}$$

であるから、この方程式の実数解の個数は、

$$\begin{cases}
 a+2 < 0 \Leftrightarrow a < -2 \text{ のとき } 0+0=0 \text{ (個)} \\
 a+2 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ のとき } 2+0=2 \text{ (個)} \\
 a-2 < 0 < a+2 \Leftrightarrow -2 < a < 2 \text{ のとき } 4+0=4 \text{ (個)} \\
 a-2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ のとき } 3+2=5 \text{ (個)} \\
 a-2 < 4 < a+2 \Leftrightarrow 2 < a < 6 \text{ のとき } 2+4=6 \text{ (個)} \\
 a-2 = 4 \Leftrightarrow a = 6 \text{ のとき } 2+3=5 \text{ (個)} \\
 a-2 > 4 \Leftrightarrow a > 6 \text{ のとき } 2+2=4 \text{ (個)}
 \end{cases}$$

となる。

$$\text{(答)} \begin{cases}
 a < -2 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\
 a = -2 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\
 -2 < a < 2, a > 6 \text{ のとき } 4 \text{ 個} \\
 a = 2, 6 \text{ のとき } 5 \text{ 個} \\
 2 < a < 6 \text{ のとき } 6 \text{ 個}
 \end{cases}$$

(1)

$\triangle ABC$ の外心は、線分 AB の垂直二等分線と、線分 BC の垂直二等分線の交点である。

一般に、 $y = x^2$ 上の異なる 2 点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ に対し、線分 PQ の中点の座標は

$$\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2} \right)$$

であり、また、線分 PQ の傾きは

$$\frac{p^2-q^2}{p-q} = p+q$$

となる。よって、線分 PQ の垂直二等分線の方程式は、

$$(p+q)\left(y - \frac{p^2+q^2}{2}\right) = -\left(x - \frac{p+q}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + (p+q)y = \frac{p+q}{2}(p^2+q^2+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。したがって、線分 PQ が線分 AB , 線分 BC の場合にそれぞれの垂直二等分線は、①に $(p, q) = (t-1, t)$, $(t, t+1)$ を代入して、

$$x + (2t-1)y = (2t-1)(t^2-t+1) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$x + (2t+1)y = (2t+1)(t^2+t+1) \quad \dots \textcircled{3}$$

と求まる。したがって、これらの交点の x 座標は、② $\times$ (2t+1)−③ $\times$ (2t−1) より、

$$2x = (2t+1)(2t-1) \cdot (-2t)$$

$$\therefore x = -t(2t+1)(2t-1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p(t) = -t(2t+1)(2t-1)$$

(2)

$$p(t) = -4t^3 + t$$

であるから、

$$p'(t) = -12t^2 + 1 = -12\left(t + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(t - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

である。したがって、 $p(t)$ の増減表は次のようになる。

t	...	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	...
$p'(t)$	−	0	+	0	−
$p(t)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	↘

増減表より、 $p(t)$ は $t = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ のとき極小値 $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ をとり、 $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ のとき極大値 $\frac{\sqrt{3}}{9}$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{極小値} -\frac{\sqrt{3}}{9} \quad (t = -\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ のとき})$$

$$\text{極大値} \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (t = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ のとき})$$