

1

(1)

$$x^2+k>|x|\Leftrightarrow k>-x^2+|x|$$

である。ここで、

$$x<0\text{のとき, }-x^2+|x|=-x^2-x=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$x\geq 0\text{のとき, }-x^2+|x|=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

であるから、 $-x^2+|x|$ は $x=\pm\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

したがって、すべての実数 x について $x^2+k>|x|$ が成立するような定数 k の範囲は、

$$k>\frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答})\ k>\frac{1}{4}$$

(2)

(a)

C_2 の方程式は、

$$x=y^2+k$$

であるから、

$$P_1(s, s^2+k), P_2(t^2+k, t)$$

である。また、 k が(1)の範囲にあることから、 C_1 は領域 $y>x$ に、 C_2 は領域 $x>y$ に存在するので、 O, P_1, P_2 が同一直線上にはない。したがって、

$$A=\frac{1}{2}\left|st-(s^2+k)(t^2+k)\right|$$

となる。さらに、いま、(1)より

$$s^2+k>s, t^2+k>t$$

が成り立っているので、

$$A=\frac{1}{2}\{(s^2+k)(t^2+k)-st\}$$

とわかる。

$$(\text{答})\ A=\frac{1}{2}\{(s^2+k)(t^2+k)-st\}$$

(b)

t を固定し、(a)の答えを s の関数として考えると、

$$A=\frac{1}{2}\{(t^2+k)s^2-ts+k(t^2+k)\}$$

であり、いま、 $t^2+k>0$ なので、 A は s の2次関数となる。これを平方完成すると、

$$A=\frac{t^2+k}{2}\left(s-\frac{t}{2(t^2+k)}\right)^2+\frac{1}{2}\left\{k(t^2+k)-\frac{t^2}{4(t^2+k)}\right\}$$

となるので、 $s=\frac{t}{2(t^2+k)}$ のとき、 A は最小値 $B=\frac{1}{2}\left\{k(t^2+k)-\frac{t^2}{4(t^2+k)}\right\}$ をとる。

$$(\text{答})\ B=\frac{1}{2}\left\{k(t^2+k)-\frac{t^2}{4(t^2+k)}\right\}$$

(c)

$t^2=u(\geq 0)$ とおき、

$$\begin{aligned} B &= f(u) \\ &= \frac{1}{2}\left\{k(u+k)-\frac{u}{2(u+k)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{k(u+k)+\frac{k}{4(u+k)}-\frac{1}{4}\right\} \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{1}{2}\left\{k-\frac{k}{4(u+k)^2}\right\} \\ &= \frac{k}{2(u+k)^2}\left(u+k+\frac{1}{2}\right)\left(u+k-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

である。よって、

$$f'(u)=0\Leftrightarrow u=\pm\frac{1}{2}-k,$$

となるので、 $\pm\frac{1}{2}-k$ と0との大小関係を考えて、次のような場合分けが生じる。

[1] $\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$ のとき

$$\frac{1}{2}-k>0>-\frac{1}{2}-k$$

であるから、 $u\geq 0$ における $f(u)$ の増減表は次のようになる。

u	0	...	$\frac{1}{2}-k$	...
$f'(u)$		—	0	+
$B=f(u)$		↘	$\frac{1}{2}k-\frac{1}{8}$	↗

増減表より、 $u=\frac{1}{2}-k$ のとき B は最小値 $\frac{1}{2}k-\frac{1}{8}$ をとる。

[2] $k\geq\frac{1}{2}$ のとき

このとき、 $0>\pm\frac{1}{2}-k$ ゆえ、 $u\geq 0$ で、 $f'(u)\geq 0$ であるから、 $f(u)$ は単調増加する。

したがって、 $u=0$ のとき B は最小値 $\frac{1}{2}k^2$ をとる。

以上、[1], [2]より、 B の最小値は

$$\begin{cases} \frac{1}{2}k-\frac{1}{8} & (\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}\text{のとき}) \\ \frac{1}{2}k^2 & (k\geq\frac{1}{2}\text{のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答})\ \begin{cases} \frac{1}{2}k-\frac{1}{8} & (\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}\text{のとき}) \\ \frac{1}{2}k^2 & (k\geq\frac{1}{2}\text{のとき}) \end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + p \int_0^1 (1+tx) u(t) dt \\ &= x^2 + \left\{ p \int_0^1 t u(t) dt \right\} x + \left\{ p \int_0^1 u(t) dt \right\} \end{aligned}$$

である。ここで、 $p \int_0^1 t u(t) dt$, $p \int_0^1 u(t) dt$ は定数であるから、

$u(x)$ が存在すれば $u(x)$ は 2 次関数である。

(証明終)

(2)

$A = \int_0^1 t u(t) dt$, $B = \int_0^1 u(t) dt$ とおくと、

$$u(x) = x^2 + Apx + Bp$$

であるから、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (t^3 + Apt^2 + Bpt) dt \\ &= \left[\frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} Apt^3 + \frac{1}{2} Bpt^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} Ap + \frac{1}{2} Bp \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} p - 1 \right) A + \frac{1}{2} p B = -\frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 (t^2 + Apt + Bp) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} Apt^2 + Bpt \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} Ap + Bp \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} p A + (p-1) B = -\frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。①, ②より、

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} p - 1 & \frac{1}{2} p \\ \frac{1}{2} p & p - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。以下、③における行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} p - 1 & \frac{1}{2} p \\ \frac{1}{2} p & p - 1 \end{pmatrix}$ とおく。 $u(x)$ が存在することと、③を満たす A, B が存在することとは同値なので、 $u(x)$ が存在しないための必要十分条件は、③を満たす A, B は存在しないことである。ここで、行列 P が逆行列をもつならば③は唯一つの解を持ってしまうため、 P の行列式について $|P| = 0$ を満たす必要があることがわかる。この条件を整理すると

$$\begin{aligned} |P| &= 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} p - 1 \right) (p - 1) - \frac{1}{4} p^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow p^2 - 16p + 12 = 0 \\ &\therefore p = 8 \pm 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

となり、逆に $p = 8 \pm 2\sqrt{13}$ のとき、①, ②は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{5 \pm 2\sqrt{13}}{3} A + (4 \pm \sqrt{13}) B = -\frac{1}{4} \\ (4 \pm \sqrt{13}) A + (7 \pm 2\sqrt{13}) B = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (4 \pm \sqrt{13}) A + (7 \pm 2\sqrt{13}) B = -\frac{2 \pm \sqrt{13}}{12} \\ (4 \pm \sqrt{13}) A + (7 \pm 2\sqrt{13}) B = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、③を満たす A, B が存在しないことがわかる。よって、十分性も満たされるから、求める p の値は $p = 8 \pm 2\sqrt{13}$ であることがわかる。

(答) $p = 8 \pm 2\sqrt{13}$

3

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (a+c)A + (ac+b^2)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (a+c)A - (ac+b^2)E \end{aligned}$$

であり、これを、

$$A^2 - A + E = O$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} (a+c)A - (ac+b^2)E - A + E &= O \\ \Leftrightarrow (a+c-1)A &= (ac+b^2-1)E \end{aligned}$$

である。ここで、 $b > 0$ であるから、 A は E の定数倍とならない。したがって、

$$\begin{cases} a+c-1=0 \\ ac+b^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\sqrt{a^2-a+1} \\ c=-a+1 \end{cases} \quad (\because b > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} b=\sqrt{a^2-a+1} \\ c=-a+1 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b+c \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。この 2 つのベクトルが垂直であるとき、内積を考えて、

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) + (b+c)(b-c) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - (-a+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a-1 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}, c = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

であるから、行列 A の表す 1 次変換は原点を中心とする $\frac{\pi}{3}$ の回転移動である。

ベクトル $P_n = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が表す xy 平面上の点を $P_n(x, y)$ とすると、

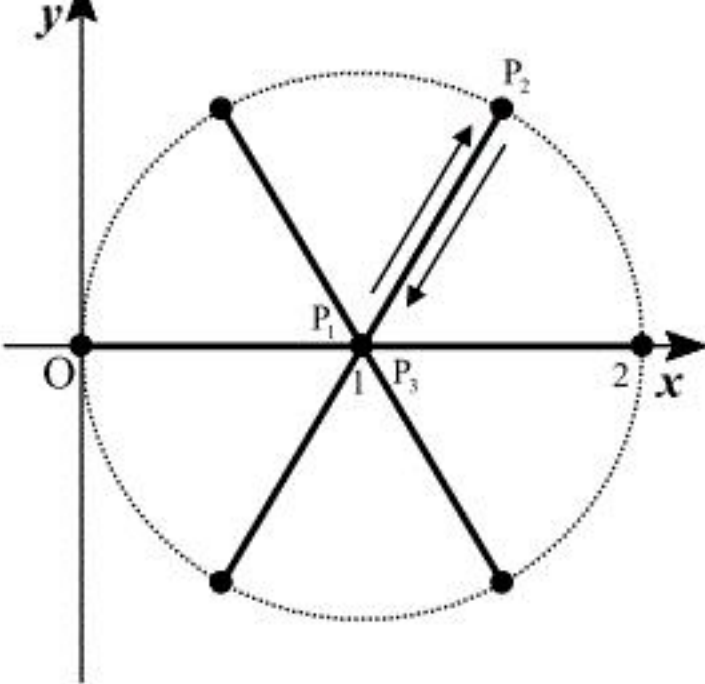
$$P_{n+1} = P_n + A^{m_n}(P_n - P_{n-1}) \Leftrightarrow P_{n+1} - P_n = A^{m_n}(P_n - P_{n-1}),$$

$$P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、ベクトル $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ の大きさは n によらず、つねに 1 であり、点 P_{n+1} は点 P_n をベクトル $\overrightarrow{P_{n-1} P_n}$ と $\frac{m_n \pi}{3}$ ($m_n = 1, 2, \dots, 6$) の角をなす方向に 1 だけ移動したものであることがわかる。

どの方向に進む確率も同様に確からしいことに注意して、それぞれの確率を求める。

[1] q_1 について



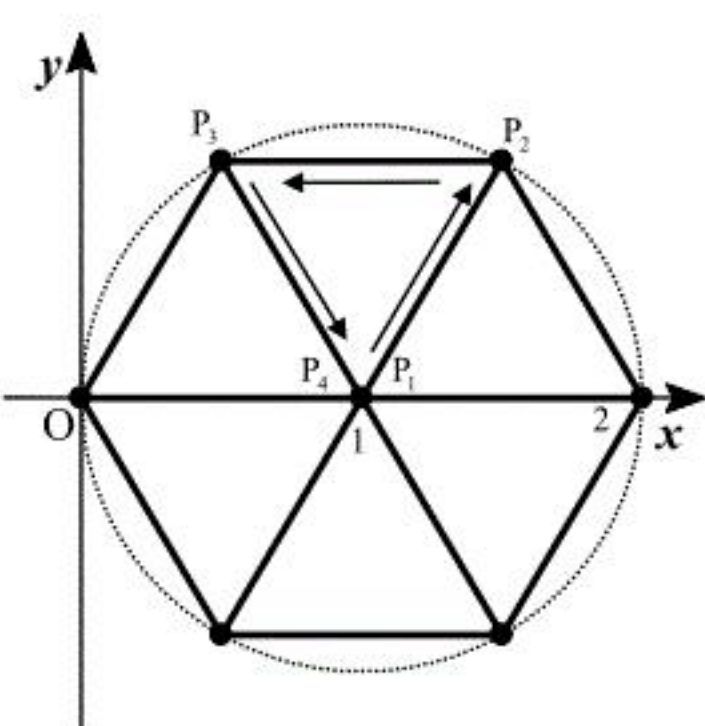
$P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる時、 $P_1(1, 0)$ から 2 回進んで再び $P_3(-1, 0)$ に戻ればよいから、上図のよう

に移動すればよい。したがって、移動の仕方は 6 通りであるから、求める確率は

$$q_1 = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

となる。

[2] q_2 について



$P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる時、 $(1, 0)$ から 3 回進んで $(-1, 0)$ に戻ればよく、上図のように移動すれ

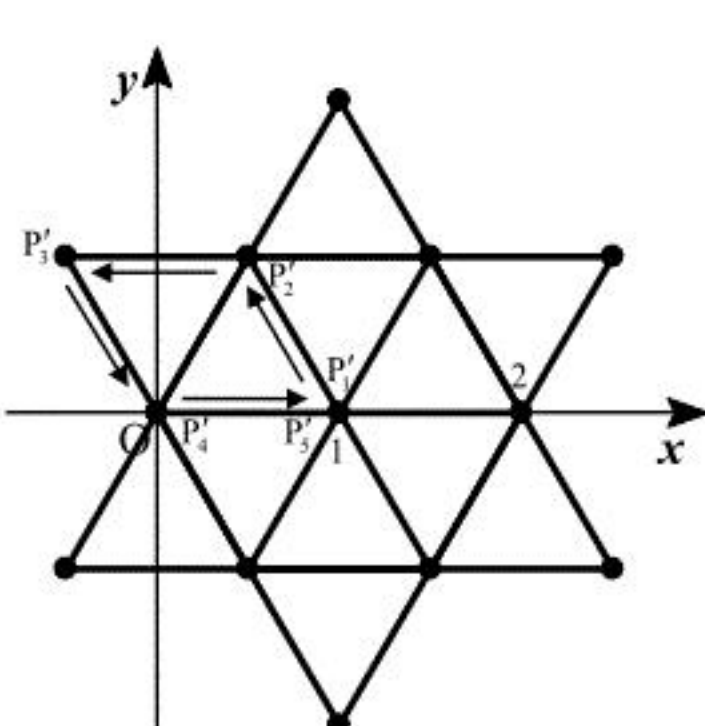
ばよい。したがって、移動の仕方は P_1 からどの向きに進むかで 6 通り、 P_2 からの進み方

が 2 通りあるから、求める確率は

$$q_2 = \frac{6 \cdot 2}{6^3} = \frac{1}{18}$$

となる。

[3] q_3 について



$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる時、 $(1, 0)$ から 4 回進んで $(1, 0)$ に戻ればよいが、ベクトル $\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_2 P_3}, \overrightarrow{P_3 P_4}$

がすべて異なることから、同じ点を通るような進み方を除く必要がある。したがって、上図のように移動すればよい。その移動の仕方は P_1 からどの向きに進むかで 6 通り、 P_2 からの進み方が 4 通りあるから、求める確率は

$$q_3 = \frac{24}{6^4} = \frac{1}{54}$$

となる。

以上まとめて、

$$q_1 = \frac{1}{6}, q_2 = \frac{1}{18}, q_3 = \frac{1}{54}$$

となる。

$$(\text{答}) q_1 = \frac{1}{6}, q_2 = \frac{1}{18}, q_3 = \frac{1}{54}$$