

1

(1)

$$f'(x)=3x^2+2x+7=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{20}{3}>0$$

であるから、 $f(x)$ は単調増加する。ここで、

$$f(-2)=-15<0$$

$$f(0)=3>0$$

であるから、中間値の定理より、方程式 $f(x)$ はただ 1 つの実数解をもち、その実数解 α は $-2<\alpha<0$ を満たす。

(証明終)

(2)

$$g(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^2+1}=x+\frac{-4x+2}{x^2+1}$$

であるから、

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\{g(x)-x\}=\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{-4x+2}{x^2+1}=0$$

である。したがって、曲線 $y=g(x)$ の漸近線は、

$$y=x$$

となる。

(答) $y=x$

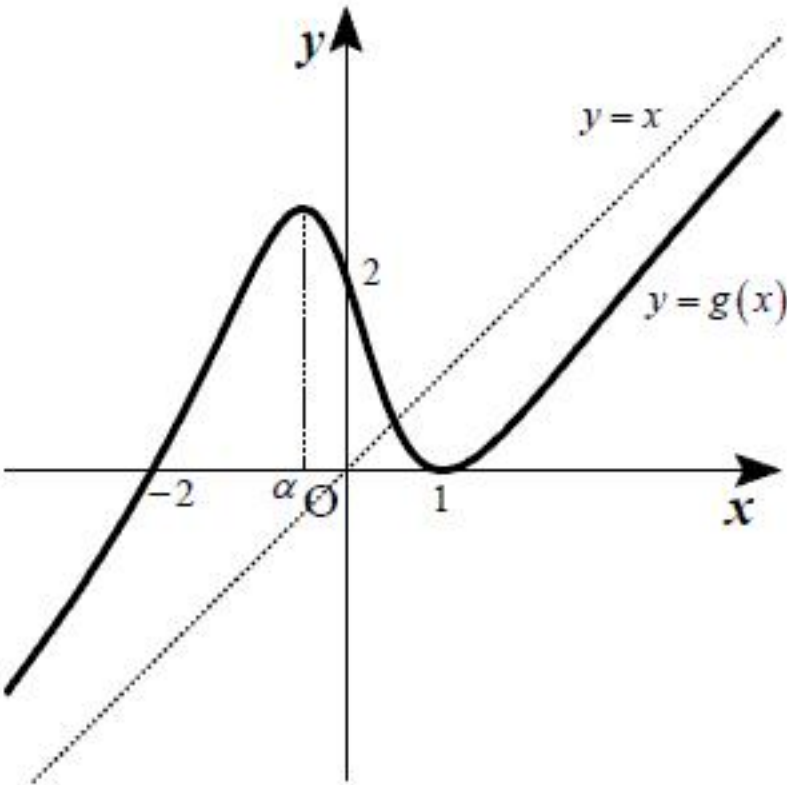
(3)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(3x^2-3)(x^2+1)-(x^3-3x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4+6x^2-4x-3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x^3+x^2+7x+3)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

であるから、(1)の結果と合わせ、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	α	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗		↘	0	↗

増減表より、 $y=g(x)$ のグラフは次のようになる。



(答) 前図

(1)

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + p \int_0^1 (1+tx)u(t) dt \\ &= x^2 + \left\{ p \int_0^1 tu(t) dt \right\} x + \left\{ p \int_0^1 u(t) dt \right\} \end{aligned}$$

である。ここで、 $p \int_0^1 tu(t) dt$, $p \int_0^1 u(t) dt$ は定数であるから、 $u(x)$ は 2 次関数である。

(証明終)

(2)

$$A = \int_0^1 tu(t) dt, B = \int_0^1 u(t) dt \text{ とおくと,}$$

$$u(x) = x^2 + Apx + Bp$$

であるから,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (t^3 + Apt^2 + Bpt) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}Apt^3 + \frac{1}{2}Bpt^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}Ap + \frac{1}{2}Bp \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}p - 1 \right) A + \frac{1}{2}pB = -\frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 (t^2 + Apt + Bp) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}Apt^2 + Bpt \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}Ap + Bp \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}pA + (p-1)B = -\frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。①, ②より,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}p-1 & \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}p & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

$u(x)$ が存在するとき、方程式③を満たす A, B が存在する。方程式③が解をもつのは、次の 2 つの場合がありうる。

$$\text{[1] 行列 } \begin{pmatrix} \frac{1}{3}p-1 & \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}p & p-1 \end{pmatrix} \text{ が逆行列をもつとき}$$

このとき、この行列の行列式は 0 でないから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}p-1 \right) (p-1) - \frac{1}{4}p^2 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - 16p + 12 &\neq 0 \\ \therefore p &\neq 8 \pm 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{[2] 行列 } \begin{pmatrix} \frac{1}{3}p-1 & \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}p & p-1 \end{pmatrix} \text{ は逆行列を持たないが、①式が②式の定数倍になっているとき}$$

①, ②式の A の係数がともに 0 になること、および、①, ②の B の係数がともに 0 になることはないから、両式の係数の比について、

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p-1 : \frac{1}{2}p = -\frac{1}{4} : -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}p : (p-1) = -\frac{1}{4} : -\frac{1}{3} \end{cases}$$

が成り立つ。整理すると、

$$\begin{cases} p = -24 \\ p = 3 \end{cases}$$

となり、これは成立しない。したがって、①式が②式の定数倍となることはない。

以上、[1], [2]より、 $u(x)$ が存在するとき、[1], すなわち、 $p \neq 8 + 2\sqrt{13}$ かつ $p \neq 8 - 2\sqrt{13}$ が成り立つ。

(証明終)

3

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (a+c)A + (ac+b^2)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (a+c)A - (ac+b^2)E \end{aligned}$$

であり、これを、

$$A^2 - A + E = O$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} (a+c)A - (ac+b^2)E - A + E &= O \\ \Leftrightarrow (a+c-1)A &= (ac+b^2-1)E \end{aligned}$$

である。ここで、 $b > 0$ であるから、 A は E の定数倍とならない。したがって、

$$\begin{cases} a+c-1=0 \\ ac+b^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\sqrt{a^2-a+1} \\ c=-a+1 \end{cases} \quad (\because b > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} b=\sqrt{a^2-a+1} \\ c=-a+1 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b+c \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。この2つのベクトルが垂直であるとき、内積を考えて、

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) + (b+c)(b-c) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - (-a+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a-1 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

であるから、行列 A の表す1次変換は原点を中心とする $\frac{\pi}{3}$ の回転移動である。

ベクトル $P_n = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が表す xy 平面上の点を $P_n(x, y)$ とすると、

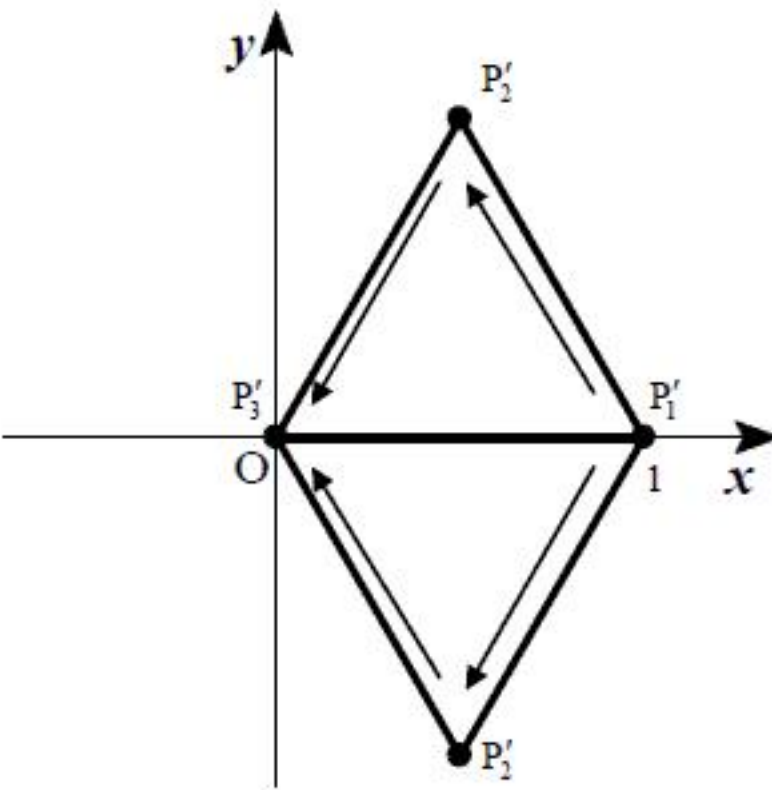
$$P_2 - P_1 = A^l (P_1 - P_0), \quad |P_1 - P_0| = 1$$

より、 $|P_2 - P_1| = 1$ であり、これと、 $P_3 = P_2 + A^m (P_2 - P_1)$ から同様に、 $|P_3 - P_2| = 1$ となる。したがって、

点 P_1 をベクトル $\overrightarrow{P_0P_1}$ と $\frac{l\pi}{3}$ の角をなす方向に1だけ移動したものが点 P_2 、

点 P_2 をベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}$ と $\frac{m\pi}{3}$ の角をなす方向に1だけ移動したものが点 P_3

であることがわかる。



したがって、 $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるとき、上図のように移動すればよい。

移動方法は2通りであり、どの方向に進むのも同様に確からしいから、求める確率は、

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{18}$$