$\boxed{1}$

$$
\begin{aligned}
S &= n+n^2+2n+1+n^3+6n^2+12n+8 \\
&= n^3+7n^2+15n+9 \\
&= n^2(n+1)+6n(n+1)+9(n+1) \\
&= (n+1)(n+3)^2
\end{aligned}
$$

である。nが奇数のときnは自然数mを用いて$n=2m-1$と置ける。これを上式に代入すると

$$
\begin{aligned}
S &= (2m-1+1)(2m-1+3)^2 \\
&= 8m(m-1)^2
\end{aligned}
$$

となる。mと$m-1$は連続する自然数であるからどちらか一方は偶数である。したがってSは$8\cdot 2=16$の倍数である。

(証明終)

$\boxed{2}$

(1)

$$x^2+y^2-6y-16 \leqq 0 \qquad \cdots ①$$
$$y+3x-8 \geqq 0 \qquad \cdots ②$$

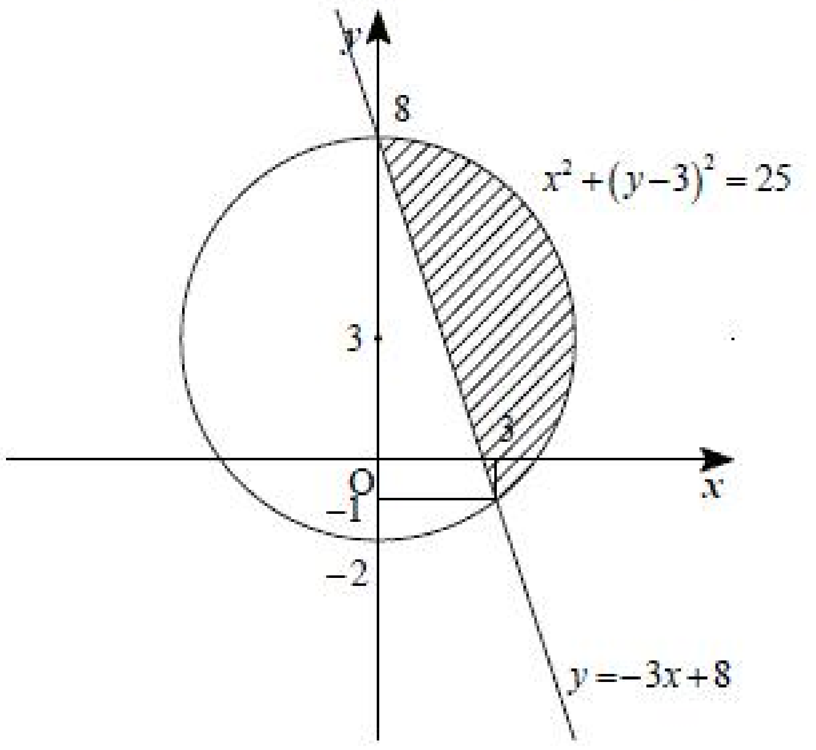
とする。①を標準形に直すと

$$x^2+(y-3)^2 \leqq 25$$

となるので，①は中心が$(0, 3)$で，半径が5の円の内部を表している。また①は直線$y+3x-8=0$よりも上側の領域を表している。次に①と②の境界，すなわち円$x^2+(y-3)^2=25$と直線$y+3x-8=0$の交点を考える。2つの方程式からyを消去すると

$$x^2+(-3x+8-3)^2=25$$
$$\Leftrightarrow 10x^2-30x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0, 3$$

となる。したがって円$x^2+(y-3)^2=25$と直線$y+3x-8=0$は2点$(0, 8), (3, -1)$で交わる。以上より領域Dは下図の斜線部のようになる。(ただし境界を含む)



(答) 前図

(2)

$y-2x=k \Leftrightarrow y=2x+k$と置くと，これは傾きが2で$y$切片が$k$の直線を表す。この直線が(1)でもとめた領域$D$と共有点を持つ中で，$k$が最大･最小となるような$(x, y)$を考えればよい。図より$k$が最大となるのは直線が点$(0, 8)$を通るときであり，このとき$k=8$である。同様に図より$k$が最小となるのは直線が円$x^2+(y-3)^2=25$に接するときである。円と直線の方程式から$y$を消去すると

$$x^2+(2x+k-3)^2=25$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+4(k-3)x+k^2-6k-16=0$$

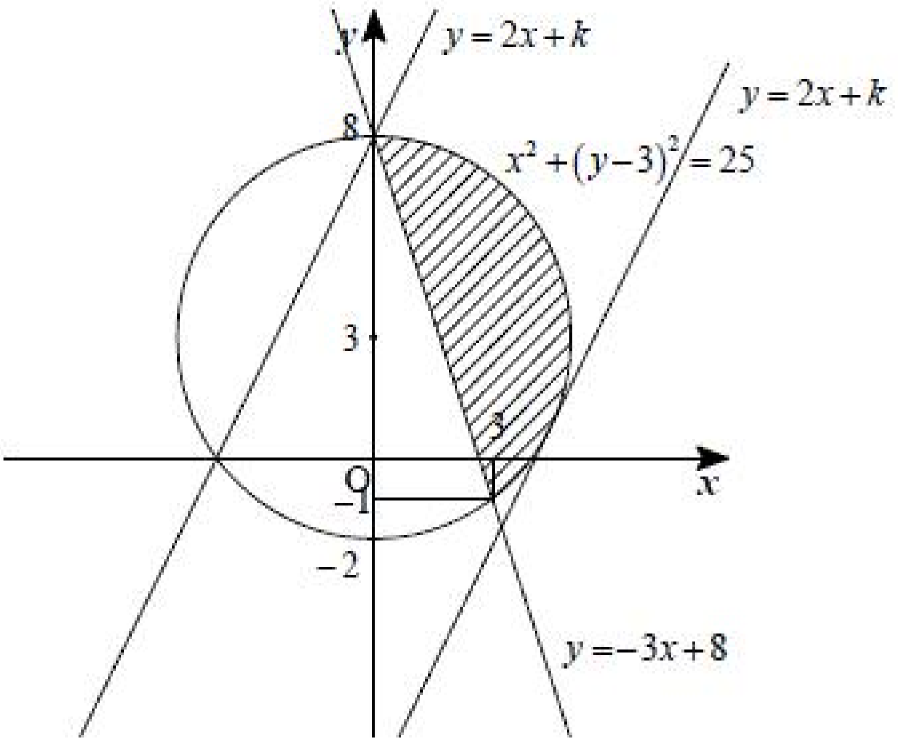
となる。直線$y=2x+k$が円$x^2+(y-3)^2=25$に接するための条件は，この方程式が重解を持つことである。したがって判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=4(k-3)^2-5(k^2-6k-16)$$
$$=-k^2+6k+116$$
$$=-\left\{k-\left(3+5\sqrt{5}\right)\right\}\left\{k-\left(3-5\sqrt{5}\right)\right\}$$

となる。したがって

$$D=0 \Leftrightarrow k=3\pm5\sqrt{5}$$

となる。下図より考えているのは$k<0$の場合であるから，最小値は$k=3-5\sqrt{5}$である。このときの重解は$x=2\sqrt{5}$であり，このとき直線の方程式から$y=3-\sqrt{5}$となる。



(答)
最大値　8　$(x, y)=(0, 8)$
最小値　$3-5\sqrt{5}$　$(x, y)=\left(2\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\right)$

3

(1)

$f(x)=x^3+ax^2+b$ を微分すると $f'(x)=3x^2+2ax$ となる。したがって ℓ_t の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2+2at)(x-t)+t^3+at^2+b \\ &= (3t^2+2at)x-3t^3-2at^3+t^3+at^2+b \\ &= t(3t+2a)x-2t^3-at^2+b \end{aligned}$$

となる。

(答) $y=t(3t+2a)x-2t^3-at^2+b$

(2)

ℓ_t が原点を通るための条件は，ℓ_t の方程式に $x=y=0$ を代入した式

$0=-2t^3-at^2+b$

$\Leftrightarrow 2t^3+at^2=b$ ・・・①

を t が満たすことである。したがって条件を満たす t がただ 1 つに決まるための条件は①の方程式がただ一つの実数解を持つことである。$g(t)=2t^3+at^2$ と置くと，①がただ 1 つの実数解を持つのは直線 $y=b$ と曲線 $y=g(t)$ がただ 1 つの共有点を持つときである。$g(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 6t^2+2at \\ &= 6t\left(t+\frac{a}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。a の値によって次のように場合分けする。

[1] $a>0$ のとき

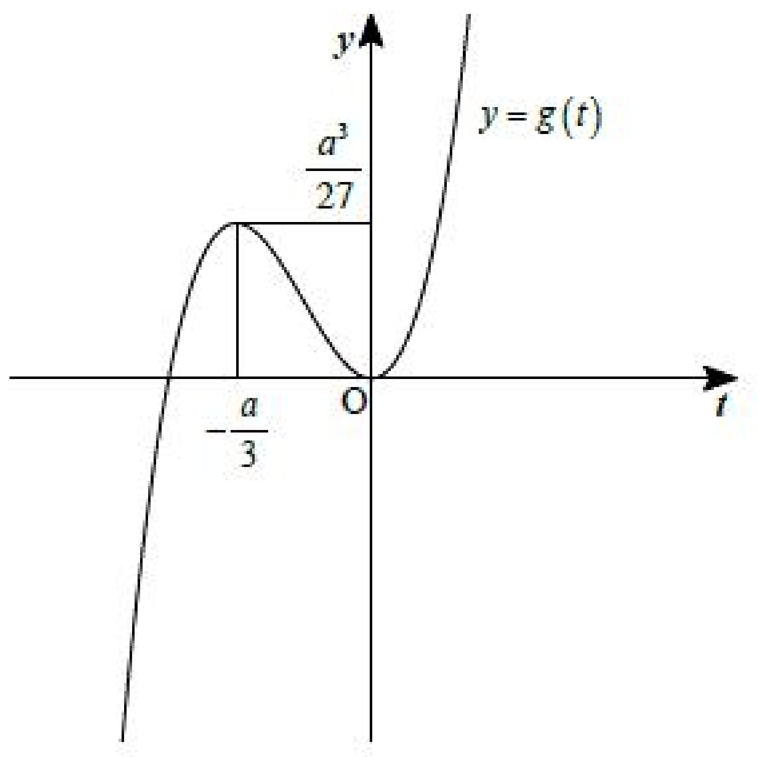
このとき $g(t)$ の増減表は下表のようになる。

t	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗		↘		↗

したがってこのとき $y=g(t)$ のグラフの概形は以下のようになる。この図より直線 $y=b$ と曲線 $y=g(t)$ がただ 1 つの共有点を持つための条件は

$\frac{a^3}{27}<b$ または $b<0$

となる。



[2] $a<0$ のとき

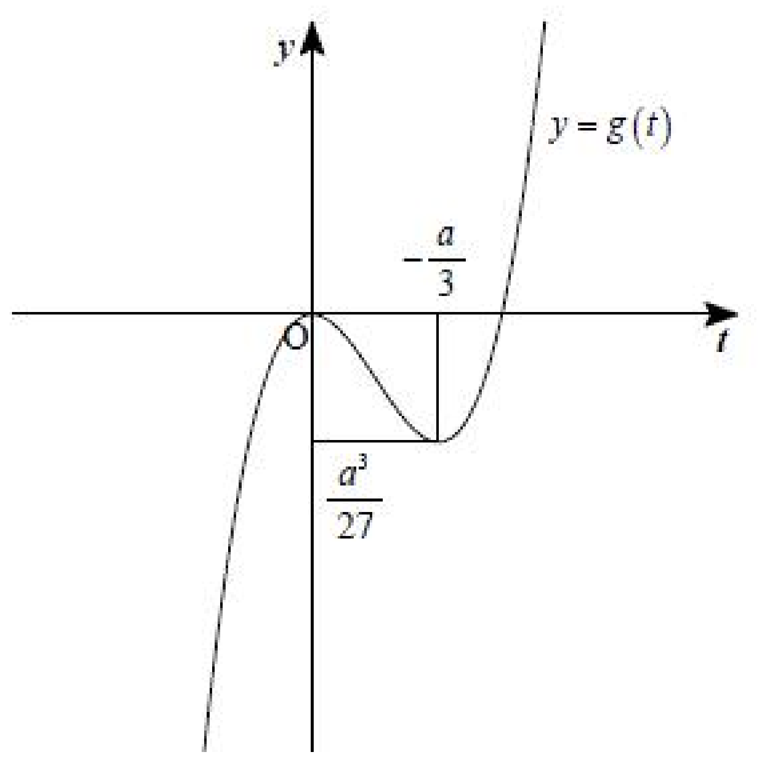
このとき $g(t)$ の増減表は下表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗		↘		↗

したがってこのとき $y=g(t)$ のグラフの概形は以下のようになる。この図より直線 $y=b$ と曲線 $y=g(t)$ がただ 1 つの共有点を持つための条件は

$\frac{a^3}{27}>b$ または $b>0$

となる。



[3] $a=0$ のとき

このとき①の方程式は

$2t^3=b$

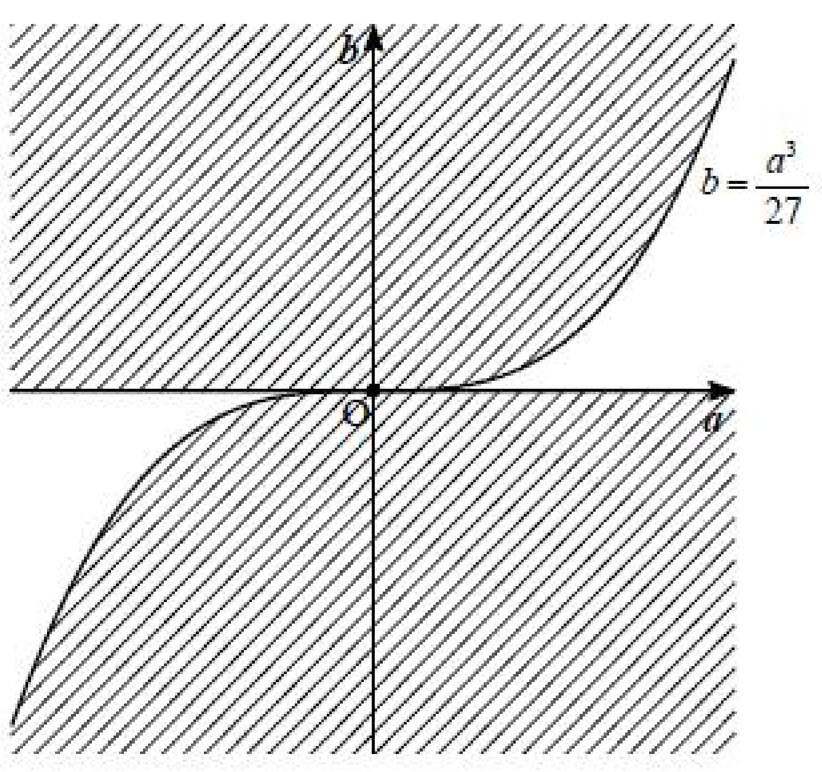
となるから，任意の b に対して①はただ 1 つの実数解を満たす。したがって b は任意である。

以上[1], [2], [3]より求める a, b の条件は次のようになる。

(答)
$a<0$ のとき　$\frac{a^3}{27}>b$ または $b>0$
$a=0$ のとき　b は任意
$a>0$ のとき　$\frac{a^3}{27}<b$ または $b<0$

(3)

(2)の結果より点 (a,b) が存在する領域は下図の斜線部となる。ただし原点を除いて境界は含まない。



(答) 前図