1

(1)

与えられた不等式の両辺に $e^{x^2}(1+x^2)>0$ をかけると

$$\frac{1}{1+x^2} \geqq e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}-(1+x^2) \geqq 0$$

となる。ここで $t=x^2$ $(0 \leqq t)$ と置くと

$$e^{x^2}-(1+x^2) \geqq 0 \Leftrightarrow e^t-(1+t) \geqq 0$$

となる。ここで $f(t)=e^t-(1+t)$ と置く。$0 \leqq t$ の範囲で $f(t) \geqq 0$ であることが示されれば題意は示される。$f(t)$ を t で微分すると

$$f'(t)=e^t-1$$

となる。e^t は単調増加するので $0 \leqq t$ の範囲において

$$f(t) \geqq e^0-1=0$$

となる。よって $f(t) \geqq 0$ が示されたので題意は示された。

(証明終)

(2)

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において

$$x^2 \leqq x \Leftrightarrow -x \leqq -x^2$$

である。したがって

$$e^{-x} \leqq e^{-x^2}$$

となる。これと(2)の結果を合わせると

$$e^{-x} \leqq e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1) \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。①の不等式において等号は常には成立しないので，①の各辺を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分すると

$$\int_0^1 e^{-x}dx < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。②の右辺と左辺を計算する。左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -e^{-1}+1 \\ &= \frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

である。次に右辺について考える。$x=\tan\theta$ と置くと積分範囲は次のように対応する。

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

また $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$ である。したがって右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。よって以上より

$$\frac{e-1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \frac{\pi}{4}$$

が示された。

(証明終)

2

(1)

与えられた等式 $f\left(\frac{2}{k}\right)+f\left(\frac{2}{\ell}\right)=\frac{\pi}{4}$ の両辺の tan を考える。加法定理を用いると

$$\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)+f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}=\tan\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}=1$$

となる。ここで $f(x)$ の定義から $\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}=\frac{2}{k}$, $\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}=\frac{2}{\ell}$ であることを用いると

$$\frac{\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{\frac{2}{k}+\frac{2}{\ell}}{1-\frac{2}{k}\cdot\frac{2}{\ell}}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{2}{k}+\frac{2}{\ell}=1-\frac{2}{k}\cdot\frac{2}{\ell}$$
$$\Leftrightarrow k\ell-2k-2\ell-4=0$$
$$\Leftrightarrow(k-2)(\ell-2)=8 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。k, ℓ は $k\leqq\ell$ を満たす自然数であることより $k-2$, $\ell-2$ は $-1\leqq k-2\leqq\ell-2$ を満たす整数である。したがって①を満たす整数の組 $(k-2, \ell-2)$ は

$(k-2, \ell-2)=(1, 8), (2, 4)$

である。よって与えられた条件を満たす自然数の組 (k, ℓ) は

$(k, \ell)=(3, 10), (4, 6)$

である。

(2)

$f\left(\frac{m}{n}\right)=a$ と置くと，$\tan a=\frac{m}{n}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\sin 2a&=2\sin a\cos a\\&=2\tan a\cos^2 a\\&=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}\\&=\frac{\frac{2m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\&=\frac{2mn}{m^2+n^2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

区分求積法を用いると, (2)の結果より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sin\left\{2f\left(\frac{n}{m}\right)\right\}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\&=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx\\&=\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1\\&=\log 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 2$

3

(1)

1 回目は，取り出すことが出来るのは 1 か 2 のいずれかなので，和が 3 の倍数になることはない。したがって $P_1=0$ である。次に P_2 を考える。1 回目に 1 のカード，2 回目に 2 のカードが出たことを $(1,2)$ のように表すとする。このとき数字の和が 3 の倍数になる組み合わせは $(1,2)$，$(2,1)$ の 2 つである。2 回目までの数字の出方の全事象は $2^2=4$ 通りであるので

$$
\begin{aligned}
P_2&=\frac{2}{4}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となる。

（答）$P_1=0,\ P_2=\dfrac{1}{2}$

(2)

n 回操作を繰り返したときの数字の和が 3 で割って 1 あまる確率を q_n，3 で割って 2 あまる確率を r_n とする。全ての自然数は 3 で割ると，割り切れるか，1 あまるか，2 あまるかのいずれかであるので

$$P_n+q_n+r_n=1 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。$n+1$ 回目に数字の和が 3 の倍数であるのは次のいずれかの場合である。

[1] n 回目の操作の後に数字の和が 3 で割ると 1 あまり，$n+1$ 回目に 2 が出る場合

[2] n 回目の操作の後に数字の和が 3 で割ると 2 あまり，$n+1$ 回目に 1 が出る場合

したがって[1]，[2]それぞれの確率を求めると

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}&=q_n\cdot\frac{1}{2}+r_n\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{2}(q_n+r_n)\\
&=\frac{1}{2}(1-P_n)
\end{aligned}
$$

となる。最後の式変形で①を用いた。

（答）$P_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-P_n)$

(3)

(2)で得られた式を変形すると

$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

となる。これを繰り返し用いると

$$
\begin{aligned}
&P_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{1}{3}\right)\\
&\therefore P_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

となる。

（答）$P_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$