1

(1)

$x^2+y^2-6y-16 \leqq 0$ ・・・①

$y+3x-8 \geqq 0$ ・・・②

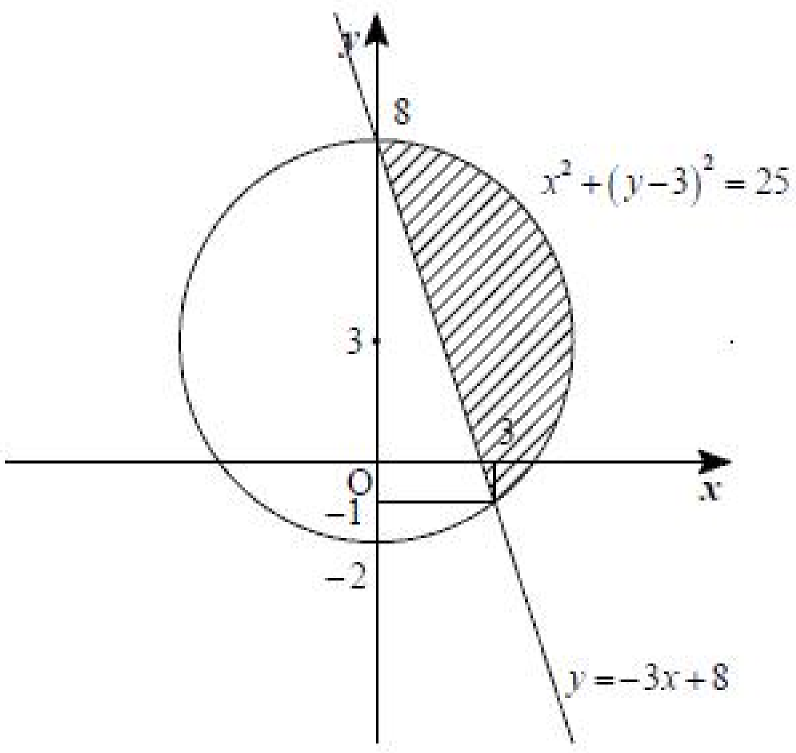
とする。①を標準形に直すと

$$x^2+(y-3)^2 \leqq 25$$

となるので，①は中心が $(0, 3)$ で，半径が 5 の円の内部を表している。また①は直線 $y+3x-8=0$ よりも上側の領域を表している。次に①と②の境界，すなわち円 $x^2+(y-3)^2=25$ と直線 $y+3x-8=0$ の交点を考える。2 つの方程式から y を消去すると

$$x^2+(-3x+8-3)^2=25$$
$$\Leftrightarrow 10x^2-30x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0, 3$$

となる。したがって円 $x^2+(y-3)^2=25$ と直線 $y+3x-8=0$ は 2 点 $(0, 8), (3, -1)$ で交わる。以上より領域 D は下図の斜線部のようになる。(ただし境界を含む)



(答) 前図

(2)

$y-2x=k \Leftrightarrow y=2x+k$ と置くと，これは傾きが 2 で y 切片が k の直線を表す。この直線が(1)でもとめた領域 D と共有点を持つ中で，k が最大･最小となるような (x, y) を考えればよい。

図より k が最大となるのは直線が $(0, 8)$ を通るときであり，このとき $k=8$ である。同様に図より k が最小となるのは直線が円 $x^2+(y-3)^2=25$ に接するときである。円と直線の方程式から y を消去すると

$$x^2+(2x+k-3)^2=25$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+4(k-3)x+k^2-6k-16$$

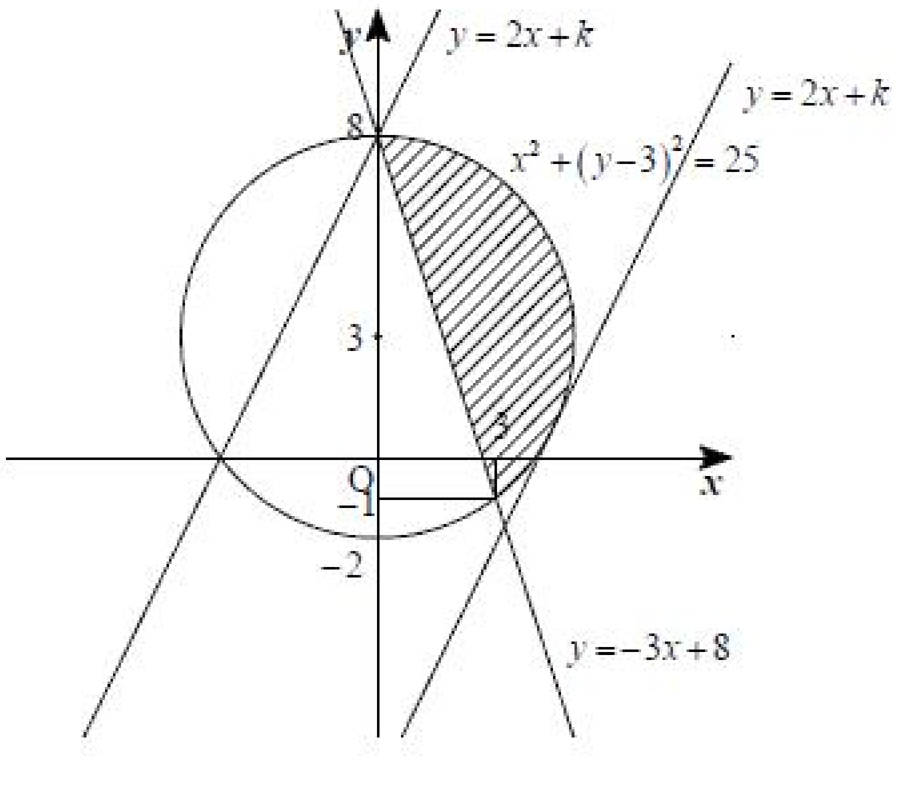
となる。直線 $y=2x+k$ が円 $x^2+(y-3)^2=25$ に接するための条件は，この方程式が重解を持つことである。したがって判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4(k-3)^2-5(k^2-6k-16)$$
$$=-k^2+6k+116$$
$$=-\{k-(3+5\sqrt{5})\}\{k-(3-5\sqrt{5})\}$$

となる。したがって

$$D=0 \Leftrightarrow k=3\pm5\sqrt{5}$$

となる。下図より考えているのは $k<0$ の場合であるから，最小値は $k=3-5\sqrt{5}$ である。このときの重解は $x=2\sqrt{5}$ であり，このとき直線の方程式から $y=3-\sqrt{5}$ となる。



(答)

最大値	8	$(x, y)=(0, 8)$
最小値	$3-5\sqrt{5}$	$(x, y)=(2\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})$

$\boxed{2}$

(1)

$f(x)=e^x-(1+x)$ と置く。$f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=e^x-1$$

となる。したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

したがって $f(x)$ は $x=0$ において最小値を取るので

$$f(x)\geqq f(0)=e^0-1=0$$

となる。したがって $f(x)\geqq 0$ より

$$e^x\geqq 1+x$$

が示された。

(証明終)

(2)

x が実数であるとき x^2 も実数である。したがって(1)の結果において x を x^2 に置き換えると

$$e^{x^2}\geqq 1+x^2$$

となる。両辺を $e^{x^2}(1+x^2)>0$ で割ると

$$e^{x^2}\geqq 1+x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}\geqq e^{-x^2}$$

となる。

(証明終)

(3)

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲において

$$x^2\leqq x \Leftrightarrow -x\leqq -x^2$$

である。したがって

$$e^{-x}\leqq e^{-x^2}$$

となる。これと(2)の結果を合わせると

$$e^{-x}\leqq e^{-x^2}\leqq \frac{1}{1+x^2}\,(0\leqq x\leqq 1)\cdots①$$

となる。①の不等式において等号は常には成立しないので，①の各辺を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で積分すると

$$\int_0^1 e^{-x}dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\cdots②$$

となる。②の右辺と左辺を計算する。左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}dx&=\left[-e^{-x}\right]_0^1\\&=-e^{-1}+1\\&=\frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

である。次に右辺について考える。$x=\tan\theta$ と置くと積分範囲は次のように対応する。

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

また $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ である。したがって右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。よって以上より

$$\frac{e-1}{e}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{\pi}{4}$$

が示された。

(証明終)

$\boxed{3}$

(1)

与えられた等式 $f\left(\frac{2}{k}\right)+f\left(\frac{2}{\ell}\right)=\frac{\pi}{4}$ の両辺の tan を考える。加法定理を用いると

$$\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)+f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}=1$$

となる。ここで $f(x)$ の定義から $\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}=\frac{2}{k}$, $\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}=\frac{2}{\ell}$ であることを用いると

$$\frac{\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{k}+\frac{2}{\ell}}{1-\frac{2}{k}\cdot\frac{2}{\ell}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{k}+\frac{2}{\ell}=1-\frac{2}{k}\cdot\frac{2}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow k\ell-2k-2\ell-4=0$$

$$\Leftrightarrow (k-2)(\ell-2)=8 \qquad \cdots ①$$

となる。k, ℓ は $k \leqq \ell$ を満たす自然数であることより $k-2$, $\ell-2$ は $-1 \leqq k-2 \leqq \ell-2$ を満たす整数である。したがって①を満たす整数の組 $(k-2, \ell-2)$ は

$$(k-2, \ell-2)=(1, 8), (2, 4)$$

である。よって与えられた条件を満たす自然数の組 (k, ℓ) は

$$(k, \ell)=(3, 10), (4, 6)$$

である。

(2)

$f\left(\frac{m}{n}\right)=a$ と置くと, $\tan a=\frac{m}{n}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\sin 2a &= 2\sin a\cos a\\ &= 2\tan a\cos^2 a\\ &= \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}\\ &= \frac{\frac{2m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\ &= \frac{2mn}{m^2+n^2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

区分求積法を用いると, (2)の結果より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sin\left\{2f\left(\frac{n}{m}\right)\right\} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\ &= \int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx\\ &= \left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1\\ &= \log 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 2$