1

(1)

与えられた不等式の両辺に$e^{x^2}\left(1+x^2\right)>0$をかけると

$$\frac{1}{1+x^2} \geqq e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}-\left(1+x^2\right) \geqq 0$$

となる。ここで$t=x^2$ $(0 \leqq t)$と置くと

$$e^{x^2}-\left(1+x^2\right) \geqq 0 \Leftrightarrow e^t-(1+t) \geqq 0$$

となる。ここで$f(t)=e^t-(1+t)$と置く。$0 \leqq t$の範囲で$f(t) \geqq 0$であることが示されれば題意は示される。$f(t)$をtで微分すると

$$f'(t)=e^t-1$$

となる。e^tは単調増加するので$0 \leqq t$の範囲において

$$f(t) \geqq e^0-1=0$$

となる。よって$f(t) \geqq 0$が示されたので題意は示された。

(証明終)

(2)

$0 \leqq x \leqq 1$の範囲において

$$x^2 \leqq x \Leftrightarrow -x \leqq -x^2$$

である。したがって

$$e^{-x} \leqq e^{-x^2}$$

となる。これと(2)の結果を合わせると

$$e^{-x} \leqq e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1) \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。①の不等式において等号は常には成立しないので，①の各辺を$0 \leqq x \leqq 1$の範囲で積分すると

$$\int_0^1 e^{-x}dx < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。②の右辺と左辺を計算する。左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -e^{-1}+1 \\ &= \frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

である。次に右辺について考える。$x=\tan\theta$と置くと積分範囲は次のように対応する。

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

また$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$である。したがって右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。よって以上より

$$\frac{e-1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \frac{\pi}{4}$$

が示された。

(証明終)

$\boxed{2}$

(1)

与えられた等式 $f\left(\frac{p}{k}\right)+f\left(\frac{p}{\ell}\right)=\frac{\pi}{4}$ の両辺の tan を考える。加法定理を用いると

$$\tan\left\{f\left(\frac{p}{k}\right)+f\left(\frac{p}{\ell}\right)\right\}=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\left\{f\left(\frac{p}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{p}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{p}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{p}{\ell}\right)\right\}}=1$$

となる。ここで $f(x)$ の定義から $\tan\left\{f\left(\frac{p}{k}\right)\right\}=\frac{p}{k}$, $\tan\left\{f\left(\frac{p}{\ell}\right)\right\}=\frac{p}{\ell}$ であることを用いると

$$\frac{\tan\left\{f\left(\frac{p}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{p}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{p}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{p}{\ell}\right)\right\}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{p}{k}+\frac{p}{\ell}}{1-\frac{p}{k}\cdot\frac{p}{\ell}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{k}+\frac{p}{\ell}=1-\frac{p}{k}\cdot\frac{p}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow k\ell-pk-p\ell-p^2=0$$

$$\Leftrightarrow (k-p)(\ell-p)=2p^2 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。k, ℓ は $k\leqq\ell$ を満たす自然数であることより $k-p$, $\ell-p$ は $1-p\leqq k-p\leqq \ell-p$ を満たす整数である。したがって①を満たす整数の組 $(k-p, \ell-p)$ は

$$(k-p, \ell-p)=(1, 2p^2), (2, p^2), (p, 2p)$$

である。よって与えられた条件を満たす自然数の組 (k, ℓ) は

$$(k, \ell)=(1+p, 2p^2+p), (2+p, p^2+p), (2p, 3p)$$

である。

(答) $(k, \ell)=(1+p, 2p^2+p), (2+p, p^2+p), (2p, 3p)$

(2)

$f\left(\frac{m}{n}\right)=a$ と置くと, $\tan a=\frac{m}{n}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\sin 2a&=2\sin a\cos a\\&=2\tan a\cos^2 a\\&=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}\\&=\frac{\frac{2m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\&=\frac{2mn}{m^2+n^2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

区分求積法を用いると, (2)の結果より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sin\left\{2f\left(\frac{n}{m}\right)\right\}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\&=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx\\&=\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1\\&=\log 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 2$

3

(1)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&x\\y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x\\y&z\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}xy&xz\\yz&xy+z^2\end{pmatrix}$$

である。したがって(ア)の条件より

$$A^2+A+E=O$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}xy+1&xz+x\\yz+y&xy+z^2+z+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

となる。両辺で各成分を比較すると

$$xy+1=0 \quad\cdots①$$
$$x(z+1)=0 \quad\cdots②$$
$$y(z+1)=0 \quad\cdots③$$
$$xy+z^2+z+1=0 \quad\cdots④$$

となる。①より $xy=-1\neq0$ であるから $x\neq0$ かつ $y\neq0$ である。したがって②より

$$z+1=0$$
$$\therefore z=-1$$

となる。①より $xy=-1$ であるから，x, y が整数であることよりこれを満たす (x, y) の組は

$$(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$$

の 2 組のみである。一方

$$B^2=\begin{pmatrix}0&w\\w&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&w\\w&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}w^2&0\\0&w^2\end{pmatrix}$$

であるから条件(イ)より

$$w^2=1$$
$$\therefore w=\pm1$$

となる。w の値によって場合分けする。

[1] $w=1$ のとき

与えられた条件から $x<yw\Leftrightarrow x<y$ である。$(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$ のうちこの条件を満たすのは $(x, y)=(-1, 1)$ のみである。このとき $(x, y, z, w)=(-1, 1, -1, 1)$ でありこれは条件(ア), (イ)及び $x<yw$ を全て満たす。

[2] $w=-1$ のとき

与えられた条件から $x<yw\Leftrightarrow x<-y$ である。$(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$ のうちこれを満たすものはないので $w=-1$ は不適である。

以上[1], [2]より求める x, y, z, w は $(x, y, z, w)=(-1, 1, -1, 1)$ である。

(答) $x=-1, y=1, z=-1, w=1$

(2)

(a)

(1)の結果より

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

である。集合 $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ と置くと $\begin{pmatrix}p_0\\q_0\end{pmatrix}\in S$ である。漸化式より，$\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ に何度か A, B をかけることで得られる。したがって S の各要素に A 及び B をかけたとき，それらが再び S の要素であることを示せば，$\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}\in S$ であることが示される。それらを計算すると

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in S$$
$$A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in S$$
$$A\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in S$$

$$B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in S$$
$$B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in S$$
$$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in S$$

となり，いずれも S の要素である。したがって $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}\in S$，すなわち $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ のいずれかであることが示された。

(証明終)

(b)

(a)の結果より $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ のいずれかであるから

$$X_n+Y_n+Z_n=1 \quad\cdots⑤$$

である。まず Y_n について考える。$n+1$ 回目に $\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ となるのは次の場合である。

[1] n 回目に $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ となる場合。

[2] n 回目に $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ となる場合。

したがって

$$Y_{n+1}=\frac{1}{2}X_n+\frac{1}{2}Z_n=\frac{1}{2}(1-Y_n) \quad\cdots⑥$$

となる。

次に Z_n について考える。$n+1$ 回目に $\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ となるのは次の場合である。

[1] n 回目に $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ となる場合。

[2] n 回目に $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ となる場合。

したがって

$$Z_{n+1}=\frac{1}{2}Y_n+\frac{1}{2}Y_n=Y_n \quad\cdots⑦$$

となる。

次に X_n について考える。⑤は $n+1$ においても成り立つので⑥, ⑦より

$$X_{n+1}=1-Y_{n+1}-Z_{n+1}$$
$$=1-\frac{1}{2}(1-Y_n)-Y_n$$

$$X_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Y_n \quad\cdots⑧$$

となる。ここで⑥より

$$Y_{n+1}=\frac{1}{2}(1-Y_n)$$
$$\Leftrightarrow Y_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(Y_n-\frac{1}{3}\right)$$

となる。これを繰り返し用いると

$$Y_n=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(Y_0-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。よってこれを⑧に代入すると

$$X_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となる。したがって $n=1, 2, 3\cdots$ に対して

$$X_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。$n=0$ とすると $X_0=0$ となるが，$\begin{pmatrix}p_0\\q_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ より $X_0=1$ であるから上式は $n=0$ では成り立たない。したがって

$$X_n\ \begin{cases}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & (n=1, 2, 3\cdots)\\ =1 & (n=0)\end{cases}$$

となる。

(答) $X_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Y_n$，$Y_{n+1}=\frac{1}{2}(1-Y_n)$，$Z_{n+1}=Y_n$

$$X_n\ \begin{cases}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & (n=1, 2, 3\cdots)\\ =1 & (n=0)\end{cases}$$