1

(1)

与えられた不等式の両辺に$e^{x^2}\left(1+x^2\right)>0$をかけると

$$\frac{1}{1+x^2} \geqq e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}-\left(1+x^2\right) \geqq 0$$

となる。ここで$t=x^2 \ (0 \leqq t)$と置くと

$$e^{x^2}-\left(1+x^2\right) \geqq 0 \Leftrightarrow e^t-(1+t) \geqq 0$$

となる。ここで$f(t)=e^t-(1+t)$と置く。$0 \leqq t$の範囲で$f(t) \geqq 0$であることが示されれば題意は示される。$f(t)$をtで微分すると

$$f'(t)=e^t-1$$

となる。e^tは単調増加するので$0 \leqq t$の範囲において

$$f(t) \geqq e^0-1=0$$

となる。よって$f(t) \geqq 0$が示されたので題意は示された。

(証明終)

(2)

$0 \leqq x \leqq 1$の範囲において

$$x^2 \leqq x \Leftrightarrow -x \leqq -x^2$$

である。したがって

$$e^{-x} \leqq e^{-x^2}$$

となる。これと(2)の結果を合わせると

$$e^{-x} \leqq e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1) \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。①の不等式において等号は常には成立しないので，①の各辺を$0 \leqq x \leqq 1$の範囲で積分すると

$$\int_0^1 e^{-x}dx < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。②の右辺と左辺を計算する。左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -e^{-1}+1 \\ &= \frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

である。次に右辺について考える。$x=\tan\theta$と置くと積分範囲は次のように対応する。

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

また$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$である。したがって右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。よって以上より

$$\frac{e-1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \frac{\pi}{4}$$

が示された。

(証明終)

$\boxed{2}$

(1)

与えられた等式 $f\left(\dfrac{2}{k}\right)+f\left(\dfrac{2}{\ell}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ の両辺の tan を考える。加法定理を用いると

$$\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)+f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}=\tan\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}=1$$

となる。ここで $f(x)$ の定義から $\tan\left\{f\left(\dfrac{2}{k}\right)\right\}=\dfrac{2}{k},\ \tan\left\{f\left(\dfrac{2}{\ell}\right)\right\}=\dfrac{2}{\ell}$ であることを用いると

$$\frac{\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}+\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}{1-\tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)\right\}\tan\left\{f\left(\frac{2}{\ell}\right)\right\}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{k}+\frac{2}{\ell}}{1-\frac{2}{k}\cdot\frac{2}{\ell}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{k}+\frac{2}{\ell}=1-\frac{2}{k}\cdot\frac{2}{\ell}$$
$$\Leftrightarrow k\ell-2k-2\ell-4=0$$
$$\Leftrightarrow (k-2)(\ell-2)=8 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。k, ℓ は $k \leqq \ell$ を満たす自然数であることより $k-2$，$\ell-2$ は $-1 \leqq k-2 \leqq \ell-2$ を満たす整数である。したがって①を満たす整数の組 $(k-2, \ell-2)$ は

$$(k-2, \ell-2)=(1, 8), (2, 4)$$

である。よって与えられた条件を満たす自然数の組 (k, ℓ) は

$$(k, \ell)=(3, 10), (4, 6)$$

である。

(答) $(k, \ell)=(3, 10), (4, 6)$

(2)

$f\left(\dfrac{m}{n}\right)=a$ と置くと，$\tan a=\dfrac{m}{n}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\sin 2a &= 2\sin a\cos a\\ &= 2\tan a\cos^2 a\\ &= \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}\\ &= \frac{\frac{2m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\ &= \frac{2mn}{m^2+n^2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{2mn}{m^3+n^3}$

(3)

区分求積法を用いると, (2)の結果より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sin\left\{2f\left(\frac{n}{m}\right)\right\} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\ &= \int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx\\ &= \left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1\\ &= \log 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 2$

3

(1)

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ y & z\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}xy & xz\\ yz & xy+z^2\end{pmatrix}$$

である。したがって(ア)の条件より

$$A^2+A+E=O$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}xy+1 & xz+x\\ yz+y & xy+z^2+z+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる。両辺で各成分を比較すると

$$xy+1=0 \qquad \cdots ①$$
$$x(z+1)=0 \qquad \cdots ②$$
$$y(z+1)=0 \qquad \cdots ③$$
$$xy+z^2+z+1=0 \qquad \cdots ④$$

となる。①より $xy=-1\neq 0$ であるから $x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ である。したがって②より

$$z+1=0$$
$$\therefore z=-1$$

となる。一方① $xy=-1$ であるから，x, y が整数であることよりこれを満たす (x, y) の組は

$$(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$$

の2組のみである。一方

$$B^2=\begin{pmatrix}0 & w\\ w & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & w\\ w & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}w^2 & 0\\ 0 & w^2\end{pmatrix}$$

であるから条件(イ)より

$$w^2=1$$
$$\therefore w=\pm 1$$

となる。w の値によって場合分けする。

[1] $w=1$ のとき

与えられた条件から $x<yw\Leftrightarrow x<y$ である。$(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$ のうちこの条件を満たすのは $(x, y)=(-1, 1)$ のみである。このとき $(x, y, z, w)=(-1, 1, -1, 1)$ でありこれは条件(ア), (イ)及び $x<yw$ を全て満たす。

[2] $w=-1$ のとき

与えられた条件から $x<yw\Leftrightarrow x<-y$ である。$(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$ のうちこれを満たすものはないので $w=-1$ は不適である。

以上[1], [2]より求める x, y, z, w は $(x, y, z, w)=(-1, 1, -1, 1)$ である。

(答) $x=-1, y=1, z=-1, w=1$

(2)

(1)の結果より

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

である。このとき，

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

であるから，$\begin{pmatrix}p_0\\q_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ に左から A または B を合わせて3回左からかけると

$$A\cdot A\cdot A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad A\cdot A\cdot B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$
$$A\cdot B\cdot A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad A\cdot B\cdot B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$
$$B\cdot A\cdot A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad B\cdot A\cdot B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$
$$B\cdot B\cdot A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad B\cdot B\cdot B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

となる。硬貨を1回投げて A, B を $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ にかける確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ であるから，$\begin{pmatrix}p_3\\q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ となる確率は $\dfrac{3}{8}$ である。

(答) $\dfrac{3}{8}$