

1

(1)

(条件 2)より、商を $ax+b$ ($a \neq 0$) とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 1)(ax + b) + (-x + 2) \\ &= ax^3 - (3a - b)x^2 + (a - 3b - 1)x + b + 2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。これより

$$f'(x) = 3ax^2 - 2(3a - b)x + a - 3b - 1$$

である。ここで(条件 1)より

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a - 2(3a - b) + a - 3b - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2a - b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12a - 4(3a - b) + a - 3b - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a + b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となることから、 $a = -2, b = 3$ となる。これは、 $a \neq 0$ をみたす。よって、 $\textcircled{1}$ より

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$$

となる。

(答) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5 \\ &= -(x - 1)(2x^2 - 7x + 5) \\ &= -(x - 1)^2(2x - 5) \end{aligned}$$

と変形できるため、方程式 $f(x) = 0$ の解は

$$x = 1 \text{ (重解)}, \frac{5}{2}$$

となる。

(答) $x = 1 \text{ (重解)}, \frac{5}{2}$

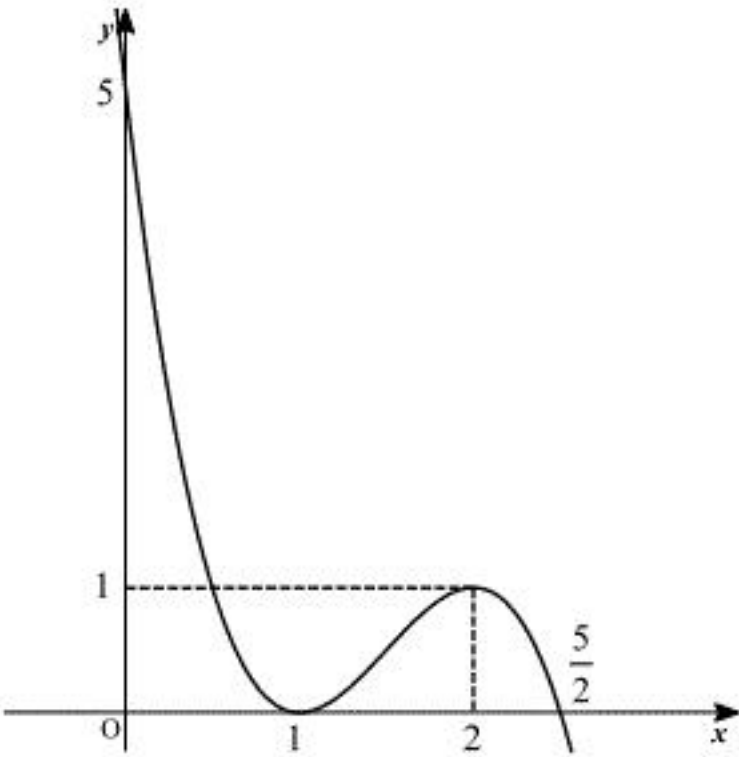
(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 18x - 12 \\ &= -6(x - 2)(x - 1) \end{aligned}$$

となるため、(1), (2)の結果を考慮して、増減表は以下ようになる。

x	$\dots$	1	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

また、グラフの概形は以下ようになる。



2

さいころを投げたとき、6つの面の出方は同様に確からしいとする。このとき、さいころを1回投げたとき、各面が出る確率は等しく $\frac{1}{6}$ である。

(1)

さいころを2回投げたとき起こり得る場合について、積 X_1X_2 の値の表を作ると以下のようになる。

$X_2 \backslash X_1$	0	0	1	-1	i	$-i$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	-1	i	$-i$
-1	0	0	-1	1	$-i$	i
i	0	0	i	$-i$	-1	1
$-i$	0	0	$-i$	i	1	-1

実数となる場合の数は28であり、この表の各マスの起こる確率は等しく $\frac{1}{36}$ であるから、求める確率は

$$\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

となる。

(答) $\frac{7}{9}$

(2)

さいころを2回投げたとき起こり得る場合について、和 X_1+X_2 の値の表を作ると以下のようになる。

$X_2 \backslash X_1$	0	0	1	-1	i	$-i$
0	0	0	1	-1	i	$-i$
0	0	0	1	-1	i	$-i$
1	1	1	2	0	$1+i$	$1-i$
-1	-1	-1	0	-2	$-1+i$	$-1-i$
i	i	i	$1+i$	$-1+i$	$2i$	0
$-i$	$-i$	$-i$	$1-i$	$-1-i$	0	$-2i$

実数となる場合の数は18であり、この表の各マスの起こる確率は等しく $\frac{1}{36}$ であるから、求める確率は

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

積 $X_1X_2X_3$ が0となるのは、さいころを3回投げて少なくとも1回は0の面が出る場合であり、この事象は1度も0が出ない事象の余事象であるため

$$1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{19}{27}$$

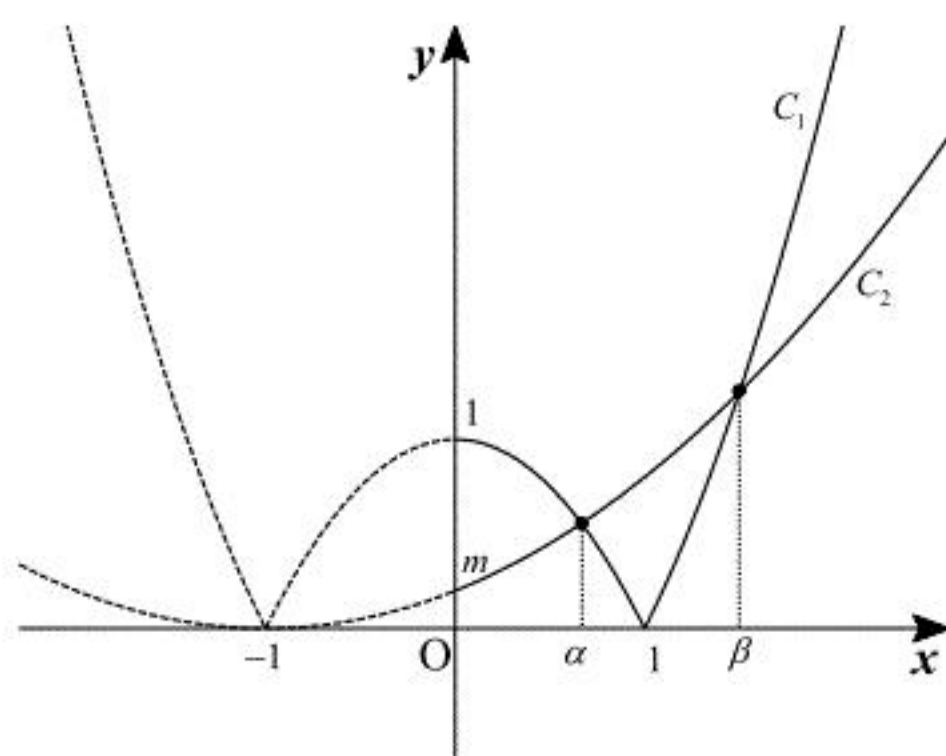
となる。

(答) $\frac{19}{27}$

3

(1)

$0 < m < 1$ より, 2つの曲線は以下のようになる。



上のグラフより, α は

$$-x^2 + 1 = m(x+1)^2$$

の正の解となり, β は

$$x^2 - 1 = m(x+1)^2$$

の正の解となる。よって, それぞれの値は

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= m(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow (x+1)\{(m+1)x + m - 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -1, \frac{-m+1}{m+1} \quad (\because 0 < m < 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= m(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow (x+1)\{(m-1)x + m + 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -1, \frac{m+1}{-m+1} \quad (\because 0 < m < 1) \end{aligned}$$

となるため

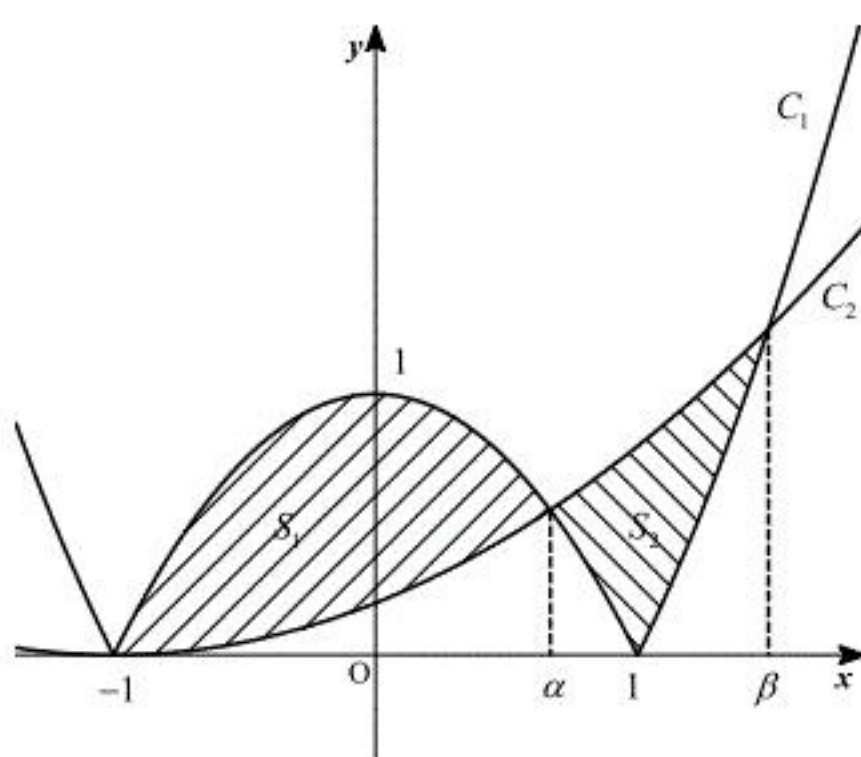
$$\alpha = \frac{-m+1}{m+1}, \beta = \frac{m+1}{-m+1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{-m+1}{m+1}, \beta = \frac{m+1}{-m+1}$$

(2)

求める面積は, 以下の斜線部の面積となる。



上のグラフより, それぞれの面積は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{\alpha} \{(-x^2 + 1) - m(x+1)^2\} dx \\ &= -(m+1) \int_{-1}^{\alpha} (x+1)(x-\alpha) dx \\ &= -(m+1) \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(\alpha+1)^3 \right\} \\ &= \frac{4}{3(m+1)^2} \\ S_2 &= \int_{\alpha}^1 \{m(x+1)^2 - (-x^2 + 1)\} dx + \int_1^{\beta} \{m(x+1)^2 - (x^2 - 1)\} dx \\ &= (m+1) \int_{\alpha}^1 (x+1)(x-\alpha) dx + (m-1) \int_1^{\beta} (x+1)(x-\beta) dx \\ &= (m+1) \int_{\alpha}^1 \{(x+1)^2 - (\alpha+1)(x+1)\} dx + (m-1) \int_1^{\beta} \{(x+1)^2 - (\beta+1)(x+1)\} dx \\ &= (m+1) \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{\alpha+1}{2}(x+1)^2 \right]_{\alpha}^1 + (m-1) \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{\beta+1}{2}(x+1)^2 \right]_1^{\beta} \\ &= (m+1) \left\{ \frac{1}{6}(\alpha+1)^3 - 2(\alpha+1) + \frac{8}{3} \right\} + (m-1) \left\{ -\frac{1}{6}(\beta+1)^3 + 2(\beta+1) - \frac{8}{3} \right\} \\ &= \left\{ \frac{4}{3(m+1)^2} - 4 + \frac{8}{3}(m+1) \right\} + \left\{ \frac{4}{3(m-1)^2} - 4 - \frac{8}{3}(m-1) \right\} \\ &= \frac{4}{3(m+1)^2} + \frac{4}{3(m-1)^2} - \frac{8}{3} \\ &= -\frac{8m^2(m^2-3)}{3(m+1)^2(m-1)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{4}{3(m+1)^2}, S_2 = -\frac{8m^2(m^2-3)}{3(m+1)^2(m-1)^2}$$

(3)

$S_1 = S_2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{4}{3(m+1)^2} &= -\frac{8m^2(m^2-3)}{3(m+1)^2(m-1)^2} \\ \Leftrightarrow (m-1)^2 &= -2m^2(m^2-3) \quad (\because 0 < m < 1) \\ \Leftrightarrow 2m^4 - 5m^2 - 2m + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m+1)^2(2m^2 - 4m + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= -1, \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < m < 1$ より

$$m = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$