

(1)

$f(x) = x + 2\sin x$ を x で微分すると

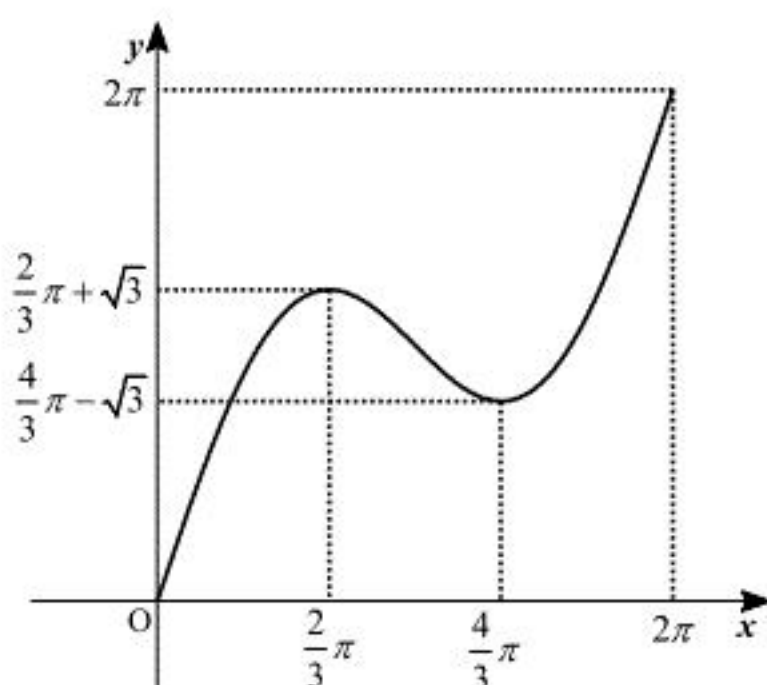
$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$

となる。 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において、 $x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ のとき $f'(x) = 0$ となることがわかるため、

増減表は以下の通りとなる。

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$	↘	$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$	↗	2π

$\frac{4}{3}\pi > \sqrt{3}$ より $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} < 2\pi, \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} > 0$ となるから、グラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の結果より、 $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{4}{3}\pi$ である。したがって、求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi (x + 2\sin x)^2 dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi (x^2 + 4x\sin x + 4\sin^2 x) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、部分積分法および三角関数の半角公式を用いて不定積分 $\int x\sin x dx$ および

$\int \sin^2 x dx$ の値を求めると

$$\begin{aligned} \int x\sin x dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C_1 \\ \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_2 \end{aligned}$$

となる。ただし、 C_1, C_2 は積分定数である。したがって

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi (x^2 + 4x\sin x + 4\sin^2 x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\cos x + 4\sin x + 2x - \sin 2x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \\ &= \pi \left(\frac{56}{81}\pi^3 + \frac{4}{3}\pi - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right) \\ &= \pi \left(\frac{56}{81}\pi^3 + \frac{8}{3}\pi - 5\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\pi \left(\frac{56}{81}\pi^3 + \frac{8}{3}\pi - 5\sqrt{3} \right)$

(1)

$f'(x) = -3(1-x)^2$ であるから、接点 $(t, (1-t)^3)$ における接線の方程式を求めると

$$\begin{aligned} y - (1-t)^3 &= -3(1-t)^2(x-t) \\ \Leftrightarrow y &= -3(1-t)^2x + (1-t)^2(1+2t) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $q_t(x) = -3(1-t)^2x + (1-t)^2(1+2t)$, $p(x) = q_0(x) = -3x + 1$ であるから

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t (-3x+1)dx + \int_t^1 \{-3(1-t)^2x + (1-t)^2(1+2t)\}dx \\ &= \left[-\frac{3}{2}x^2 + x \right]_0^t + \left[-\frac{3}{2}(1-t)^2x^2 + (1-t)^2(1+2t)x \right]_t^1 \\ &= -\frac{3}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}(1-t)^2 + (1-t)^2(1+2t) + \frac{3}{2}(1-t)^2t^2 - (1-t)^2(1+2t)t \\ &= -\frac{3}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}(1-t)^2(1-t^2) + (1-t)^3(1+2t) \\ &= -\frac{3}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}(1-t)^3\{3(1+t) - 2(1+2t)\} \\ &= -\frac{3}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}(1-t)^4 \\ &= -\frac{1}{2}t^4 + 2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{2}t^4 + 2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t - \frac{1}{2}$$

(2)

$F'(t) = -2t^3 + 6t^2 - 9t + 3$ であるから、 $t=0, 1$ をそれぞれ代入して

$$\begin{aligned} F'(0) &= 3 \\ F'(1) &= -2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad F'(0) = 3, F'(1) = -2$$

(3)

$F'(t)$ をさらに t で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= -6t^2 + 12t - 9 \\ &= -6(t-1)^2 - 3 \\ &< 0 \end{aligned}$$

となるため、 $F'(t)$ は単調減少関数である。また中間値の定理と(2)の結果より、方程式 $F'(t) = 0$ は $0 < t < 1$ においてただ1つの解を持つことが分かる。この解を α とおくと、 $F(t)$ に関する増減表は以下のとおりとなる。

t	...	α	...
$F'(t)$	+	0	-
$F(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

したがって、 $F(t)$ は $t = \alpha$ のみで最大値をとる。以上より、題意は示された。

(証明終)

(1)

直線 ℓ_t の傾きは

$$\frac{\{(1+t)\cos t + \sin t\} - \{-(1+t)\cos t + \sin t\}}{1+2t-(-1)} = \cos t \quad (\because 1+2t > -1)$$

である。したがって、直線 ℓ_t の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (\cos t)(x+1) - (1+t)\cos t + \sin t \\ &= x\cos t - t\cos t + \sin t \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $y = x\cos t - t\cos t + \sin t$

(2)

点 P の y 座標は $k\cos t - t\cos t + \sin t$ である。これを $g(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(t) &= -k\sin t - \cos t + t\sin t + \cos t \\ &= (t-k)\sin t \end{aligned}$$

である。したがって、 $t=k$ または $\sin t=0$ のときに $g'(t)=0$ となる。

[1] $k \leq 0$ のとき

増減表は以下のとおりとなる。

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	+	
$g(t)$	k	$\nearrow$	1

したがって、 $k \leq y \leq 1$ である。

[2] $0 < k \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

増減表は以下のとおりとなる。

t	0	...	k	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	-	0	+	
$g(t)$	k	$\searrow$	$\sin k$	$\nearrow$	1

したがって、 $0 < k \leq 1$ のとき $\sin k \leq y \leq 1$ 、 $1 < k \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin k \leq y \leq k$ である。

[3] $\frac{\pi}{2} < k$ のとき

増減表は以下のとおりとなる。

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	-	
$g(t)$	k	$\searrow$	1

したがって、 $1 \leq y \leq k$ である。

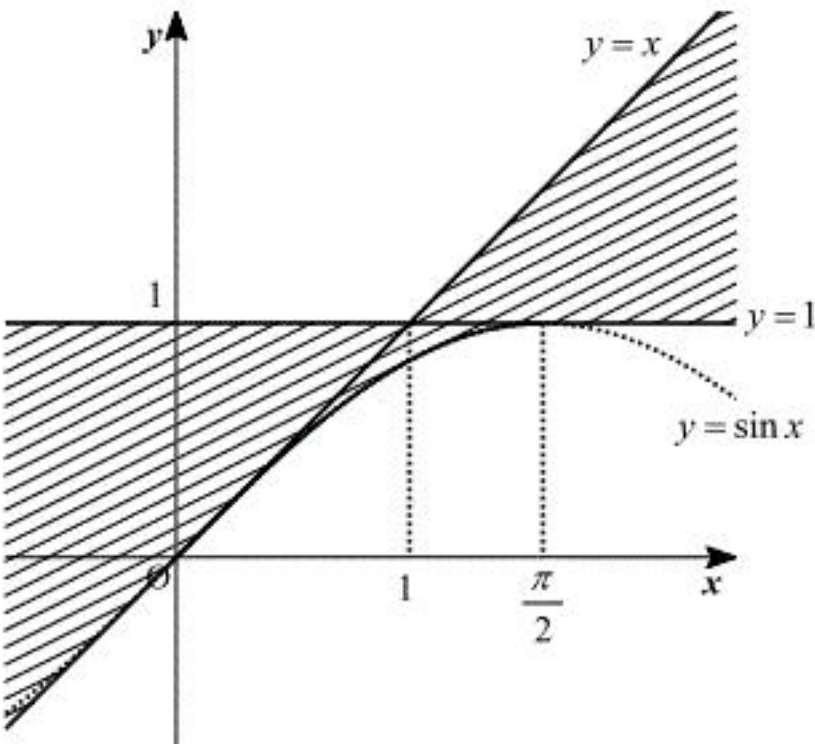
以上をまとめると、 $k \leq 0$ のとき $k \leq y \leq 1$ 、 $0 < k \leq 1$ のとき $\sin k \leq y \leq 1$ 、 $1 < k \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin k \leq y \leq k$ 、 $\frac{\pi}{2} < k$ のとき $1 \leq y \leq k$ となる。

$$(答) \left\{ \begin{array}{ll} k \leq 0 \text{ のとき} & k \leq y \leq 1 \\ 0 < k \leq 1 \text{ のとき} & \sin k \leq y \leq 1 \\ 1 < k \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき} & \sin k \leq y \leq k \\ \frac{\pi}{2} < k \text{ のとき} & 1 \leq y \leq k \end{array} \right.$$

(3)

(2)の結果を k から x に置き換え、その不等式が示す領域を図示すると以下のようなになる。ただし、境界を含む。



(答) 前図の斜線部(境界を含む)