

1

さいころを投げたとき、6つの面の出方は同様に確からしいとする。このとき、さいころを1回投げたとき、各面が出る確率は等しく $\frac{1}{6}$ である。

- (1) さいころを2回投げたとき起こり得る場合について、積 X_1X_2 の値の表を作ると以下のようになる。

$X_2 \backslash X_1$	0	0	1	-1	i	$-i$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	-1	i	$-i$
-1	0	0	-1	1	$-i$	i
i	0	0	i	$-i$	-1	1
$-i$	0	0	$-i$	i	1	-1

実数となる場合の数は28であり、この表の各マスの起こる確率は等しく $\frac{1}{36}$ であるから、求める確率は

$$\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

となる。

(答) $\frac{7}{9}$

- (2) さいころを2回投げたとき起こり得る場合について、和 X_1+X_2 の値の表を作ると以下のようになる。

$X_2 \backslash X_1$	0	0	1	-1	i	$-i$
0	0	0	1	-1	i	$-i$
0	0	0	1	-1	i	$-i$
1	1	1	2	0	$1+i$	$1-i$
-1	-1	-1	0	-2	$-1+i$	$-1-i$
i	i	i	$1+i$	$-1+i$	$2i$	0
$-i$	$-i$	$-i$	$1-i$	$-1-i$	0	$-2i$

実数となる場合の数は18であり、この表の各マスの起こる確率は等しく $\frac{1}{36}$ であるから、求める確率は

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

- (3) 積 $X_1X_2X_3$ が実数となる確率は、以下のようになる。

[1] 積 $X_1X_2=0$ のとき

このとき、3回目にいずれの目が出た場合も積 $X_1X_2X_3$ は0となり実数となる。ここで、 $X_1X_2=0$ となる確率は(1)の表より $\frac{20}{36}$ となる。以上より、求める確率は

$$\frac{20}{36} \cdot \frac{6}{6} = \frac{5}{9}$$

である。

[2] 積 $X_1X_2=1, -1$ のとき

このとき X_3 は実数となればよい。ここで、積 $X_1X_2=1, -1$ となる確率は(1)の表より $\frac{8}{36}$ となる。よって、求める確率は

$$\frac{8}{36} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{27}$$

である。

[3] 積 $X_1X_2=i, -i$ のとき

このとき X_3 は0または虚数となればよい。ここで、積 $X_1X_2=i, -i$ となる確率は(1)の表より $\frac{8}{36}$ となる。よって、求める確率は

$$\frac{8}{36} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{27}$$

である。

以上、[1], [2], [3]は互いに排反であることより、求める確率は

$$\frac{5}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$$

となる。

(答) $\frac{23}{27}$

2

(1)

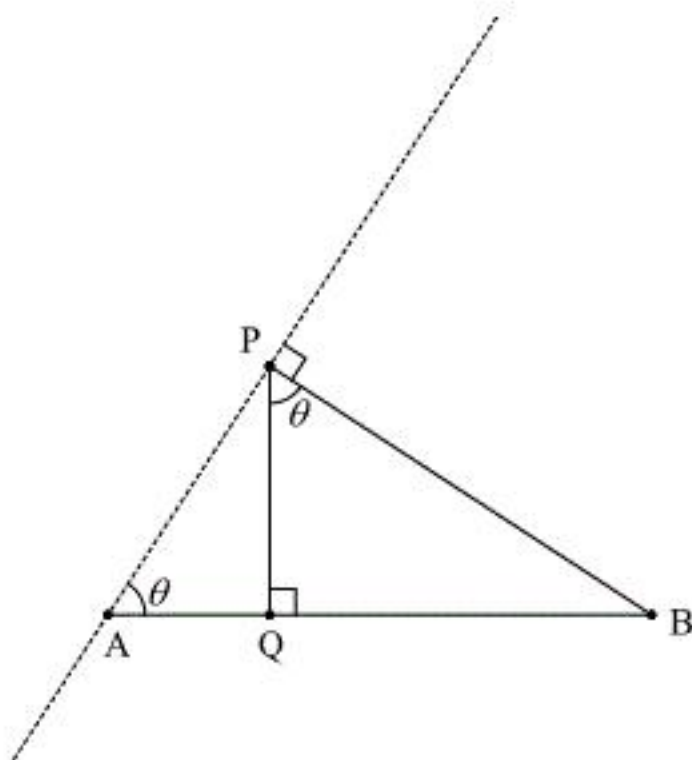
θ の値によって、以下のように場合分けして考える。

[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \sqrt{1-t^2}$$

である。また、直線 AC を破線で表すと、各点の位置関係は下図のようになる。



よって、上図より

$$\begin{aligned} BP &= AB \sin \theta \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BQ &= BP \sin \theta \\ &= \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ &= BP \cos \theta \\ &= \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

となるため、 $\triangle BPQ$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle BPQ &= \frac{1}{2} BQ \cdot PQ \\ &= \frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} t^3 \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

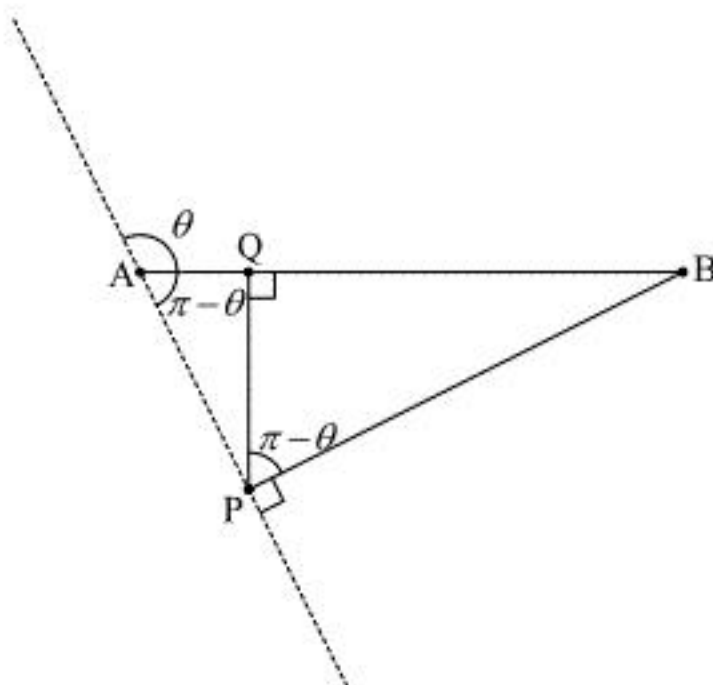
である。

[2] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{1-t^2}$$

である。また、直線 AC を破線で表すと、各点の位置関係は下図のようになる。



よって、上図より

$$\begin{aligned} BP &= AB \sin(\pi - \theta) \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BQ &= BP \sin(\pi - \theta) \\ &= \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ &= BP \cos(\pi - \theta) \\ &= -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

となるので、 $\triangle BPQ$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle BPQ &= \frac{1}{2} BQ \cdot PQ \\ &= -\frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} t^3 \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

である。

以上、[1], [2]より、いずれの場合も

$$\triangle BPQ = \frac{1}{2} t^3 \sqrt{1-t^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \triangle BPQ = \frac{1}{2} t^3 \sqrt{1-t^2}$$

(2)

$0 < \theta < \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < t < 1$ であるもとで

$$f(t) = t^6 (1-t^2)$$

とおくと、つねに $f(t) > 0$ となる。このとき、(1)より

$$\triangle BPQ = \frac{1}{2} \sqrt{f(t)}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} f'(t) &= -8t^7 + 6t^5 \\ &= -2t^5 (2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となることより、関数 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $f(t)$ は最大となる。以上より、 $\triangle BPQ$ の面積の最大値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3^3}{2^8}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{3\sqrt{3}}{32}$$

3

(1)

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 a^2 x^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{a^2}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi a^2}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi a^2}{3}$$

(2)

$$f(x) = x + \sin x$$

とおく。このとき、両辺微分すると

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

となることから

$$f'(0) > 0, f'(x) \geq 0 \quad (0 < x \leq 2\pi)$$

となり、また、 $f(0) = 0$ であるから、 $0 < x \leq 2\pi$ においてつねに $f(x) > 0$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果より、 $0 < x \leq 2\pi$ の範囲においてつねに $f(x) > 0$ であるから、求める体積 W は

$$\begin{aligned} W &= \pi \int_0^{2\pi} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (x + \sin x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (x^2 + 2x \sin x + \sin^2 x) dx \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{8\pi^3}{3} \\ \int_0^{2\pi} x \sin x dx &= [-x \cos x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos x) dx \\ &= [-x \cos x + \sin x]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。よって、 W は

$$\begin{aligned} W &= \pi \left\{ \frac{8\pi^3}{3} + 2 \cdot (-2\pi) + \pi \right\} \\ &= \frac{8\pi^4}{3} - 3\pi^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8\pi^4}{3} - 3\pi^2$$

(4)

$V = W$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2}{3} &= \frac{8\pi^4}{3} - 3\pi^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 8\pi^3 - 9\pi \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{8\pi^3 - 9\pi} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \sqrt{8\pi^3 - 9\pi}$$