

1

(1)

直線 ℓ_t の傾きは

$$\frac{\{(1+t)\cos t + \sin t\} - \{-(1+t)\cos t + \sin t\}}{1+2t-(-1)} = \cos t \quad (\because 1+2t > -1)$$

である。したがって、直線 ℓ_t の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (\cos t)(x+1) - (1+t)\cos t + \sin t \\ &= x\cos t - t\cos t + \sin t \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $y = x\cos t - t\cos t + \sin t$

(2)

点 P の y 座標は $k\cos t - t\cos t + \sin t$ である。これを $g(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(t) &= -k\sin t - \cos t + t\sin t + \cos t \\ &= (t-k)\sin t \end{aligned}$$

である。したがって、 $t=k$ または $\sin t = 0$ のときに $g'(t) = 0$ となる。

[1] $k \leq 0$ のとき

増減表は以下のとおりとなる。

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	+	
$g(t)$	k	$\nearrow$	1

したがって、 $k \leq y \leq 1$ である。

[2] $0 < k \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

増減表は以下のとおりとなる。

t	0	...	k	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	-	0	+	
$g(t)$	k	$\searrow$	$\sin k$	$\nearrow$	1

したがって、 $0 < k \leq 1$ のとき $\sin k \leq y \leq 1$ 、 $1 < k \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin k \leq y \leq k$ である。

[3] $\frac{\pi}{2} < k$ のとき

増減表は以下のとおりとなる。

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	-	
$g(t)$	k	$\searrow$	1

したがって、 $1 \leq y \leq k$ である。

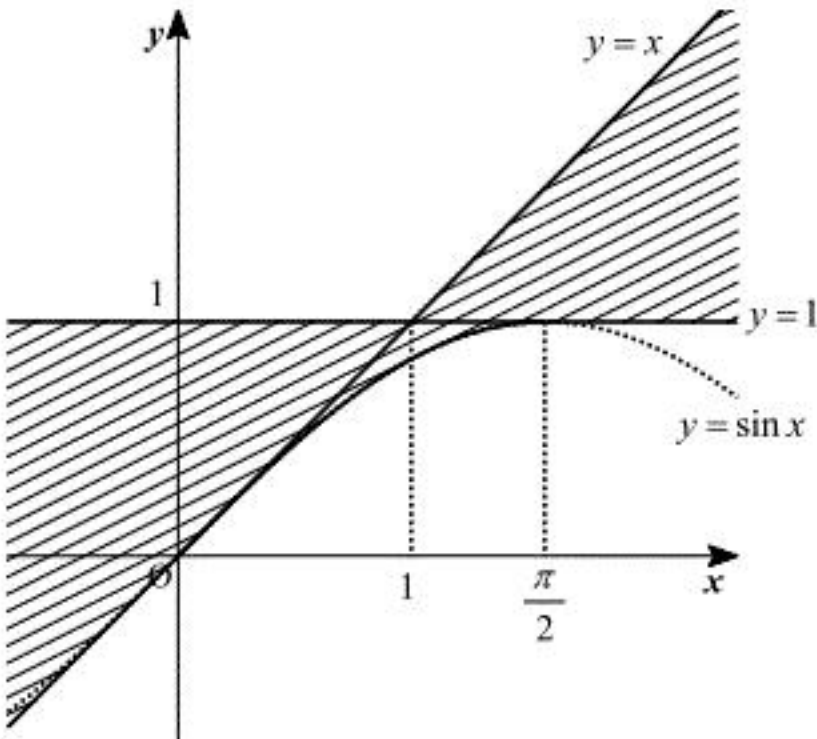
以上をまとめると、 $k \leq 0$ のとき $k \leq y \leq 1$ 、 $0 < k \leq 1$ のとき $\sin k \leq y \leq 1$ 、 $1 < k \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin k \leq y \leq k$ 、 $\frac{\pi}{2} < k$ のとき $1 \leq y \leq k$ となる。

$$(答) \left\{ \begin{array}{ll} k \leq 0 \text{ のとき} & k \leq y \leq 1 \\ 0 < k \leq 1 \text{ のとき} & \sin k \leq y \leq 1 \\ 1 < k \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき} & \sin k \leq y \leq k \\ \frac{\pi}{2} < k \text{ のとき} & 1 \leq y \leq k \end{array} \right.$$

(3)

(2)の結果を k から x に置き換え、その不等式が示す領域を図示すると以下のようなになる。ただし、境界を含む。



(答) 前図の斜線部(境界を含む)

2

(1)

与えられた式 $\int_{k-x}^{k+x} f(t) dt = \frac{x}{2} \{f(k-x) + 2f(k) + f(k+x)\}$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f(k+x) + f(k-x) &= \frac{1}{2} \{f(k-x) + f(k+x) + 2f(k)\} + \frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx} \{f(k-x) + f(k+x)\} \\ \Leftrightarrow g(x) &= \frac{1}{2} g(x) + f(k) + \frac{x}{2} g'(x) \\ \Leftrightarrow g(x) &= 2f(k) + xg'(x) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = 2f(k) + xg'(x)$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{g(x)}{x} \right)' &= \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} \\ &= \frac{xg'(x) - 2f(k) - xg'(x)}{x^2} \\ &= -\frac{2f(k)}{x^2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{2f(k)}{x^2}$$

(3)

(2)で得られた関係式を $x > 0$ の場合について x で不定積分すると

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= \frac{2f(k)}{x} + C_1(k) \\ \Leftrightarrow g(x) &= 2f(k) + C_1(k)x \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $C_1(k)$ は k に依存する積分定数である。 $g(x) = f(k+x) + f(k-x)$ より

$$\begin{aligned} f(k+x) + f(k-x) &= 2f(k) + C_1(k)x \\ \Leftrightarrow \{f(k+x) - f(k)\} + \{f(k-x) - f(k)\} &= C_1(k)x \\ \Leftrightarrow \frac{f(k+x) - f(k)}{x} - \frac{f(k-x) - f(k)}{-x} &= C_1(k) \end{aligned}$$

となる。辺々 $x \rightarrow +0$ という極限をとると、微分係数の定義より

$$\begin{aligned} f'(k) - f'(k) &= C_1(k) \\ \Leftrightarrow C_1(k) &= 0 \end{aligned}$$

となる。これより

$$g(x) = 2f(k)$$

が得られ、 $g(x) = f(k+x) + f(k-x)$ より

$$f(k+x) + f(k-x) = 2f(k) \quad (x > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。一方、 $x < 0$ のとき(2)で得られた関係式を不定積分すると、 $C_2(k)$ を k に依存する積分定数として

$$g(x) = 2f(k) + C_2(k)x$$

が得られ、 $x > 0$ の場合と同様にして $C_2(k) = 0$ となるため

$$f(k+x) + f(k-x) = 2f(k) \quad (x < 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで

$$f(k+x) + f(k-x) = 2f(k) \quad \dots \textcircled{3}$$

は $x=0$ においても成り立つため、①、②も合わせて、③は任意の実数 x に対して成り立つ。

よって

$$g(x) = 2f(k)$$

であることから

$$g'(x) = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となり、 $g'(x)$ は定数関数であることが示された。

(証明終)

(4)

$g(x) = f(k+x) + f(k-x)$ より

$$g'(x) = f'(k+x) - f'(k-x)$$

が得られる。④より

$$\begin{aligned} f'(k+x) - f'(k-x) &= 0 \\ \Leftrightarrow f'(k+x) &= f'(k-x) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{5}$$

となることが示された。

(証明終)

(5)

⑤について、 $x=k$ とおくと

$$f'(2k) = f'(0)$$

が成り立つ。 k は任意の実数であるから $2k$ も任意の実数である。したがって任意の x について

$$f'(x) = f'(0) \quad (\text{定数})$$

が成立することがわかる。これを a とおくと、 $f'(x) = a$ となる。これを不定積分して

$$f(x) = ax + b$$

が得られる。ただし、 b は積分定数である。 $f(x)$ は定数関数ではないから $a \neq 0$ となり、 x の 1 次関数であることが示された。

(証明終)

(1)

背理法を用いて命題「 A は単位行列 E の実数倍ではない」を証明する。実数 k を用いて $A = kE$ と表すことができると仮定する。このとき

$$A^3 - 3A + 2E = (k^3 - 3k + 2)E = O$$

となるが、 $E \neq O$ であるから、 $k^3 - 3k + 2 = 0$ である。したがって

$$\begin{aligned} k^3 - 3k + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)^2(k+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 1, -2 \end{aligned}$$

となる。しかし、 $k=1$ とすると、 $A=E$ より $a+d=2$ となるため条件 $a+d \neq 2$ に反する。また、 $k=-2$ とすると条件 $A \neq -2E$ に反する。したがって、仮定は誤りである。以上より A は E の実数倍ではないことが示された。

(証明終)

(2)

$\alpha = a+d, \beta = ad-bc$ とおくと、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - \alpha A + \beta E = O$$

が成立する。これと条件の $A^3 - 3A + 2E = O$ より

$$\begin{aligned} A^3 - 3A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow A(\alpha A - \beta E) - 3A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow \alpha A^2 - (\beta + 3)A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow \alpha(\alpha A - \beta E) - (\beta + 3)A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta - 3)A + (2 - \alpha\beta)E &= O \end{aligned}$$

である。 $\alpha^2 - \beta - 3 \neq 0$ と仮定すると、 $A = \frac{\alpha\beta - 2}{\alpha^2 - \beta - 3}E$ となり、(1)の結果に反する。よって

$$\alpha^2 - \beta - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、また

$$2 - \alpha\beta = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①、②より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ \alpha\beta - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ \alpha(\alpha^2 - 3) - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ \alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ (\alpha+1)^2(\alpha-2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 $a+d \neq 2$ であることから、 $\alpha \neq 2$ となるため $\alpha = -1$ である。よって、 $\beta = -2$ となる。

以上より

$$\begin{aligned} (a+d, ad-bc) &= (\alpha, \beta) \\ &= (-1, -2) \end{aligned}$$

である。

(答) $(a+d, ad-bc) = (-1, -2)$

(3)

(2)の結果より、 $A^2 + A - 2E = O$ である。この式の両辺に A^{-1} を左からかけると

$$\begin{aligned} A + E - 2A^{-1} &= O \\ \Leftrightarrow A^{-1} &= \frac{1}{2}(A + E) \end{aligned}$$

と変形できる。 $A \neq kE$ であることから、 A^{-1} を A と E の和で表す方法は 1 通りに決まるため、

$p_1 = q_1 = \frac{1}{2}$ であることがわかる。また、 $(A^{-1})^n = p_n A + q_n E$ と表せるとき

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{n+1} &= A^{-1}(A^{-1})^n \\ &= A^{-1}(p_n A + q_n E) \\ &= p_n E + q_n A^{-1} \\ &= p_n E + \frac{q_n}{2}(A + E) \\ &= \frac{q_n}{2}A + \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)E \end{aligned}$$

であるから、 $(A^{-1})^{n+1}$ を A と E の和で表す方法は 1 通りに決まることも考慮して

$(A^{-1})^{n+1} = p_{n+1}A + q_{n+1}E$ と係数を比較することにより

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{q_n}{2} \\ q_{n+1} = p_n + \frac{q_n}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。ここで、 $r_1 = q_1 - 2p_1 = -\frac{1}{2}$ であり

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= q_{n+1} - 2p_{n+1} \\ &= \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right) - q_n \\ &= -\frac{1}{2}(q_n - 2p_n) \\ &= -\frac{1}{2}r_n \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} r_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} r_1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

となる。

(答) $r_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(4)

③より

$$\begin{aligned} p_{n+1} + q_{n+1} &= p_n + q_n \\ &= \dots \\ &= p_1 + q_1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、(3)の結果と合わせて

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{3}\{2(p_n + q_n) + (q_n - 2p_n)\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

と $\{q_n\}$ の一般項が求まる。

(答) $\frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$