

1

(1)

$f(x) = x + 2\sin x$ を x で微分すると

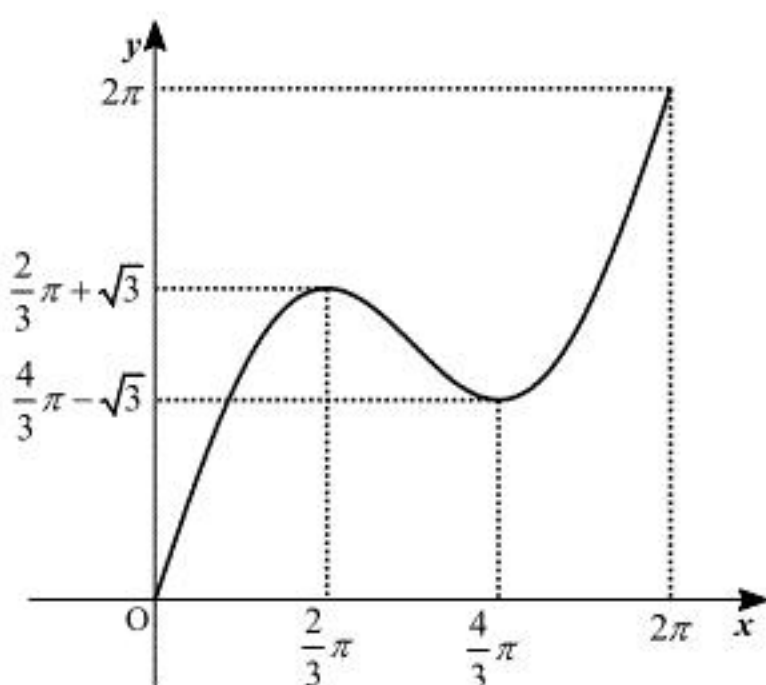
$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$

となる。 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において、 $x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ のとき $f'(x) = 0$ となることがわかるため、

増減表は以下の通りとなる。

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$	↘	$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$	↗	2π

$\frac{4}{3}\pi > \sqrt{3}$ より $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} < 2\pi, \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} > 0$ となるから、グラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の結果より、 $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{4}{3}\pi$ である。したがって、求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi (x + 2\sin x)^2 dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi (x^2 + 4x\sin x + 4\sin^2 x) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、部分積分法および三角関数の半角公式を用いて不定積分 $\int x\sin x dx$ および

$\int \sin^2 x dx$ の値を求めると

$$\begin{aligned} \int x\sin x dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_2 \end{aligned}$$

となる。ただし、 C_1, C_2 は積分定数である。したがって

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi (x^2 + 4x\sin x + 4\sin^2 x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\cos x + 4\sin x + 2x - \sin 2x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \\ &= \pi \left(\frac{56}{81}\pi^3 + \frac{4}{3}\pi - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right) \\ &= \pi \left(\frac{56}{81}\pi^3 + \frac{8}{3}\pi - 5\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\pi \left(\frac{56}{81}\pi^3 + \frac{8}{3}\pi - 5\sqrt{3} \right)$

[2]

(1)

$$f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4x^3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4x^4} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{x^4} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(x)$ の $x > 1$ における増減表は以下のとおりとなる。

x	1	...
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	↗

したがって、 $x > 1$ のとき $f(x) > 1$ となることが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4x^3} - 1 \\ &= \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{4x^3} \\ &= \frac{(x-1)(3x^3 - x^2 - x - 1)}{4x^3} \end{aligned}$$

より、 $x > 1$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) - 1}{x - 1} \\ &= \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{4x^3} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ がすべて減少関数であることから、 $g(x)$ は増加関数であることが示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} (1 + 1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \{ 3 - (0 + 0 + 0) \} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3}{4}$$

(4)

$x_1 = 2 > 1$ であることから $x_2 = f(x_1) > 1$ となる。帰納的に考えて

$$x_n > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。また、(2), (3)の結果から、 $x > 1$ において $g(x)$ は増加関数であり、

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3}{4} \text{ であるため、} 0 < g(x) < \frac{3}{4} \text{ となる。よって}$$

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{f(x) - 1}{x - 1} < \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 0 &< f(x) - 1 < \frac{3}{4}(x - 1) \end{aligned}$$

である。したがって、 $x_{n+1} = f(x_n)$ を用いて

$$0 < x_{n+1} - 1 < \frac{3}{4}(x_n - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。これを繰り返し用いて

$$\begin{aligned} 0 &< x_n - 1 < \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} (x_1 - 1) \\ \Leftrightarrow 0 &< x_n - 1 < \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \quad (\because x_1 = 2) \end{aligned}$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} = 0$ であるから、はさみうちの原理により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

背理法を用いて命題「 A は単位行列 E の実数倍ではない」を証明する。実数 k を用いて $A = kE$ と表すことができると仮定する。このとき

$$A^3 - 3A + 2E = (k^3 - 3k + 2)E = O$$

となるが、 $E \neq O$ であるから、 $k^3 - 3k + 2 = 0$ である。したがって

$$\begin{aligned} k^3 - 3k + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)^2(k+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 1, -2 \end{aligned}$$

となる。しかし、 $k=1$ とすると、 $A=E$ より $a+d=2$ となるため条件 $a+d \neq 2$ に反する。また、 $k=-2$ とすると条件 $A \neq -2E$ に反する。したがって、仮定は誤りである。以上より A は E の実数倍ではないことが示された。

(証明終)

(2)

$\alpha = a+d, \beta = ad-bc$ とおくと、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - \alpha A + \beta E = O$$

が成立する。これと条件の $A^3 - 3A + 2E = O$ より

$$\begin{aligned} A^3 - 3A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow A(\alpha A - \beta E) - 3A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow \alpha A^2 - (\beta + 3)A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow \alpha(\alpha A - \beta E) - (\beta + 3)A + 2E &= O \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta - 3)A + (2 - \alpha\beta)E &= O \end{aligned}$$

である。 $\alpha^2 - \beta - 3 \neq 0$ と仮定すると、 $A = \frac{\alpha\beta - 2}{\alpha^2 - \beta - 3}E$ となり、(1)の結果に反する。よって

$$\alpha^2 - \beta - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、また

$$2 - \alpha\beta = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①、②より

$$\begin{aligned} \begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ \alpha\beta - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ \alpha(\alpha^2 - 3) - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ \alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha^2 - 3 \\ (\alpha+1)^2(\alpha-2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 $a+d \neq 2$ であることから、 $\alpha \neq 2$ となるため $\alpha = -1$ である。よって、 $\beta = -2$ となる。以上より

$$\begin{aligned} (a+d, ad-bc) &= (\alpha, \beta) \\ &= (-1, -2) \end{aligned}$$

である。

(答) $(a+d, ad-bc) = (-1, -2)$

(3)

(2)の結果より、 $A^2 + A - 2E = O$ である。この式の両辺に A^{-1} を左からかけると

$$\begin{aligned} A + E - 2A^{-1} &= O \\ \Leftrightarrow A^{-1} &= \frac{1}{2}(A + E) \end{aligned}$$

と変形できる。 $A \neq kE$ であることから、 A^{-1} を A と E の和で表す方法は 1 通りに決まるため、

$p_1 = q_1 = \frac{1}{2}$ であることがわかる。また、 $(A^{-1})^n = p_n A + q_n E$ と表せるとき

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{n+1} &= A^{-1}(A^{-1})^n \\ &= A^{-1}(p_n A + q_n E) \\ &= p_n E + q_n A^{-1} \\ &= p_n E + \frac{q_n}{2}(A + E) \\ &= \frac{q_n}{2}A + \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)E \end{aligned}$$

であるから、 $(A^{-1})^{n+1}$ を A と E の和で表す方法は 1 通りに決まることも考慮して

$(A^{-1})^{n+1} = p_{n+1}A + q_{n+1}E$ と係数を比較することにより

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{q_n}{2} \\ q_{n+1} = p_n + \frac{q_n}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。ここで、 $r_1 = q_1 - 2p_1 = -\frac{1}{2}$ であり

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= q_{n+1} - 2p_{n+1} \\ &= \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right) - q_n \\ &= -\frac{1}{2}(q_n - 2p_n) \\ &= -\frac{1}{2}r_n \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} r_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} r_1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{1}{3}$