

(ア)の条件より、 k を整数として、

$$y = kx$$

とおける。これを(ウ)の条件に代入して、

$$x^2 + 6! = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 720 = k^2 x^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 = 720$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $k^2 - 1$ は平方数ではないから、 x^2 のとりうる値は

$$x^2 = 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 12^2$$

である。①より、それぞれで k^2 のとりうる値を考えると

$$k^2 - 1 = 180, 80, 45, 20, 5$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 181, 81, 46, 21, 6$$

となるため、 k が整数であるという条件を満たすのは

$$k^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow k = \pm 9$$

のみである。このとき、

$$x^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because \text{条件(イ)})$$

である。以上より、

$$(x, y) = (3, 27), (3, -27)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = (3, 27), (3, -27)$$

(1)

2つの実数 a, b について、命題 p :「 $a > 2$ かつ $b > 2$ 」命題 q :「 $ab - 2(a+b) + 4 > 0$ かつ $a+b > 4$ 」

とする。

[1] $p \Rightarrow q$ について命題 p が成り立つとき、

$$\begin{aligned}
 ab - 2(a+b) + 4 &= ab - 2a - 2b + 4 \\
 &= a(b-2) - 2(b-2) \\
 &= (a-2)(b-2) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 a+b &> 2+2 \\
 &> 4
 \end{aligned}$$

であるから、命題 q は成り立つ。[2] $q \Rightarrow p$ について命題 q が成り立つとき、

$$\begin{aligned}
 ab - 2(a+b) + 4 &> 0 \\
 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) &> 0
 \end{aligned}$$

であるから、

$$「a > 2 \text{ かつ } b > 2」 \text{ または } 「a < 2 \text{ かつ } b < 2」$$

である。このうち、 $a+b > 4$ が成立するのは、

$$a > 2 \text{ かつ } b > 2$$

であるから、命題 p は成り立つ。

以上[1], [2]より、必要十分条件であることが示せた。

(証明終)

(2)

(a)

 $t = \log_2 x$ とおく。与式は、

$$t^2 - (k+2)t - k + 17 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、題意より、 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ の2つの解をもつ。よって、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \log_2 \alpha + \log_2 \beta = k+2 \\ (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) = -k+17 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \log_2 (\alpha\beta) = k+2 \\ (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) = -k+17 \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \log_2 (\alpha\beta) = k+2 \\ (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) = -k+17 \end{cases}$$

(b)

 x についての方程式

$$(\log_2 x)^2 - (k+2)\log_2 x - k + 17 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が異なる2つの実数解を持つとき、 t についての方程式①も異なる2つの実数解を持つから、その判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}
 D &> 0 \\
 \Leftrightarrow k^2 + 8k - 64 &> 0 \\
 \Leftrightarrow k < -4 - 4\sqrt{5}, -4 + 4\sqrt{5} < k &\quad \cdots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

である。方程式②の異なる2つの実数解が4より大きいとき、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \alpha > 4 \\ \beta > 4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \log_2 \alpha > 2 \\ \log_2 \beta > 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

であるから、上式が成り立つには、(1)より、

$$\begin{cases} (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) - 2(\log_2 \alpha + \log_2 \beta) + 4 > 0 \\ \log_2 \alpha + \log_2 \beta > 4 \end{cases}$$

となればよい。(a)より、

$$\begin{aligned}
 (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) - 2(\log_2 \alpha + \log_2 \beta) + 4 &> 0 \\
 \Leftrightarrow (-k+17) - 2(k+2) + 4 &> 0 \\
 \Leftrightarrow -3k + 17 &> 0 \\
 \Leftrightarrow k < \frac{17}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_2 \alpha + \log_2 \beta &> 4 \\
 \Leftrightarrow k + 2 &> 4 \\
 \Leftrightarrow 2 < k
 \end{aligned}$$

であるから、

$$2 < k < \frac{17}{3} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。③、④について、

$$\begin{aligned}
 \frac{17}{3} - (-4 + 4\sqrt{5}) &= \frac{29}{3} - 4\sqrt{5} \\
 &= \sqrt{\frac{841}{9}} - \sqrt{80} \\
 &= \sqrt{\frac{841}{9}} - \sqrt{\frac{720}{9}} \\
 &> 0 \\
 (-4 + 4\sqrt{5}) - 2 &= 4\sqrt{5} - 6 \\
 &= \sqrt{80} - \sqrt{36} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

より求める k の値の範囲は、

$$-4 + 4\sqrt{5} < k < \frac{17}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -4 + 4\sqrt{5} < k < \frac{17}{3}$$

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

より、点 $(t, t^3 - 3t^2 + t + 6)$ における曲線 C_1 の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (t^3 - 3t^2 + t + 6) &= (3t^2 - 6t + 1)(x - t) \\ \therefore y &= (3t^2 - 6t + 1)x - 2t^3 + 3t^2 + 6 \end{aligned}$$

となる。この接線が点 $(-1, f(-1))$ すなわち点 $(-1, 1)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} 1 &= -(3t^2 - 6t + 1) - 2t^3 + 3t^2 + 6 \\ \Leftrightarrow 1 &= -2t^3 + 6t + 5 \\ \Leftrightarrow t^3 - 3t - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)^2(t-2) &= 0 \\ \therefore t &= -1, 2 \end{aligned}$$

である。 $t = -1$ のとき、接線の式は

$$y = 10x + 11$$

となり、 $t = 2$ のとき、接線の式は

$$y = x + 2$$

となる。よって、

$$\begin{cases} \ell_1: y = x + 2 \\ \ell_2: y = 10x + 11 \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} \ell_1: y = x + 2 \\ \ell_2: y = 10x + 11 \end{cases}$$

(2)

(1)より、直線 ℓ_1 と曲線 C_1 の交点は、点 $(-1, 1), (2, 4)$ の2点であり、直線 ℓ_2 と曲線 C_1 の交点は、

$$\begin{aligned} 10x + 11 &= x^3 - 3x^2 + x + 6 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(x-5) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 5 \end{aligned}$$

より、点 $(-1, 1), (5, 61)$ の2点である。よって、曲線 C_2 は3点 $(-1, 1), (2, 4), (5, 61)$ を通る。ここで、

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

とおくと、

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 25a + 5b + c = 61 \end{cases}$$

が成り立つ。連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$

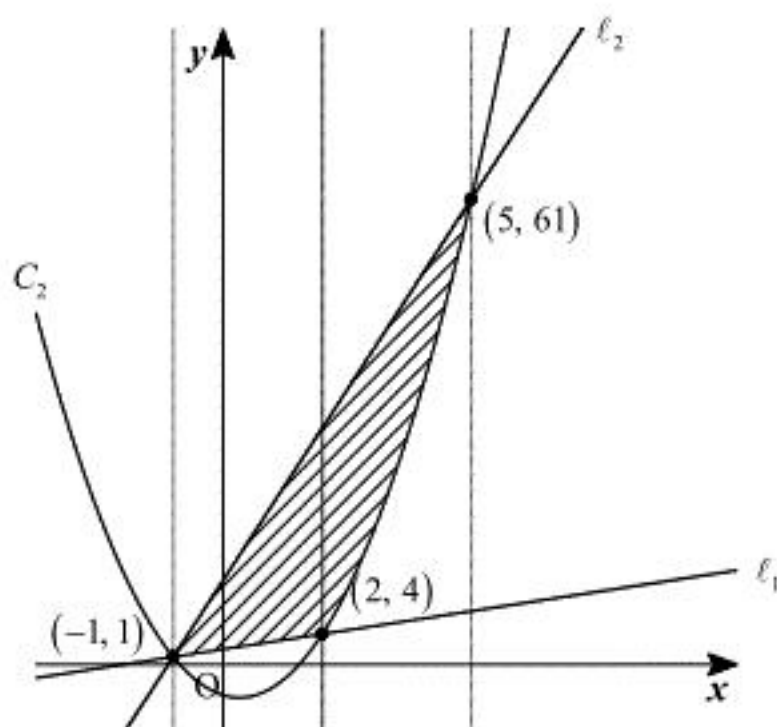
であり、

$$g(x) = 3x^2 - 2x - 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = 3x^2 - 2x - 4$$

(3)



上図の斜線部が求める面積 S である。よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(10x+11) - (x+2)\} dx + \int_2^5 \{(10x+11) - (3x^2 - 2x - 4)\} dx \\ &= 9 \int_{-1}^2 (x+1) dx - 3 \int_2^5 (x^2 - 4x - 5) dx \\ &= 9 \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 - 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \right]_2^5 \\ &= \frac{81}{2} + 54 \\ &= \frac{189}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{189}{2}$$