

(1)

$y=kx$ に垂直であるので、直線 ℓ_P, ℓ_Q の傾きは $-\frac{1}{k}$ である。直線 ℓ_P, ℓ_Q はそれぞれ点

$P(1, 4), Q(4, 1)$ を通るから、

$$\begin{cases} \ell_P: y = -\frac{1}{k}(x-1)+4 \\ \ell_Q: y = -\frac{1}{k}(x-4)+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell_P: y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k} + 4 \\ \ell_Q: y = -\frac{1}{k}x + \frac{4}{k} + 1 \end{cases}$$

である。

(答)
$$\begin{cases} \ell_P: y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k} + 4 \\ \ell_Q: y = -\frac{1}{k}x + \frac{4}{k} + 1 \end{cases}$$

(2)

交点 R の x 座標 x_R は、(1)より、

$$kx_R = -\frac{1}{k}x_R + \frac{1}{k} + 4$$

$$\Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{k}\right)x_R = \frac{1}{k} + 4$$

$$\Leftrightarrow x_R = \frac{\frac{1}{k} + 4}{k + \frac{1}{k}}$$

$$\therefore x_R = \frac{4k+1}{k^2+1}$$

であり、交点 S の x 座標 x_S は

$$kx_S = -\frac{1}{k}x_S + \frac{4}{k} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{k}\right)x_S = \frac{4}{k} + 1$$

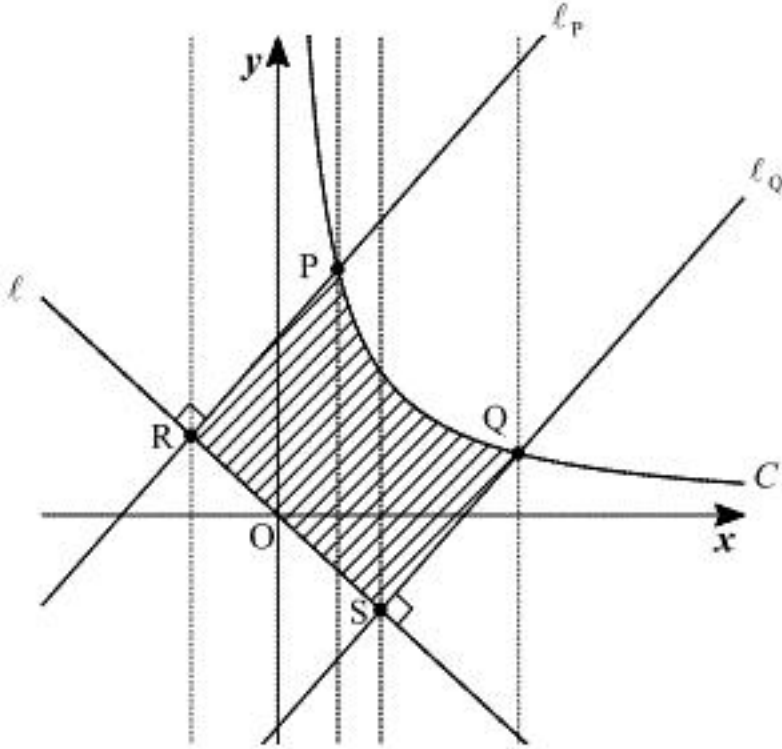
$$\Leftrightarrow x_S = \frac{\frac{4}{k} + 1}{k + \frac{1}{k}}$$

$$\therefore x_S = \frac{k+4}{k^2+1}$$

である。

(答) $x_R = \frac{4k+1}{k^2+1}, x_S = \frac{k+4}{k^2+1}$

(3)



上図の斜線部が求める面積 M である。上図より、台形 PQSR の面積から、直線 PQ と曲線 C で囲まれる部分の面積を引けばよい。ここで、辺 PR, QS の長さは点と直線の距離より、

$$PR = \frac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$= \frac{4-k}{\sqrt{k^2+1}} \quad (\because k < 0)$$

$$QS = \frac{|4k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$= \frac{1-4k}{\sqrt{k^2+1}} \quad (\because k < 0)$$

である。また、辺 RS の長さは点 P から直線 ℓ_Q までの距離なので、

$$RS = \frac{\left| \frac{1}{k} \cdot 1 + 4 - 1 - \frac{4}{k} \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 1}}$$

$$= \frac{|1+4k-k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$= \frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$= \frac{3-3k}{\sqrt{k^2+1}} \quad (\because k < 0)$$

である。よって、台形 PQSR の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4-k}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{1-4k}{\sqrt{k^2+1}} \right) \cdot \frac{3-3k}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{15}{2} \cdot \frac{(1-k)^2}{k^2+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、直線 PQ と曲線 C で囲まれる部分の面積は、

$$\text{直線 PQ: } y = -x + 5$$

より、

$$\int_1^4 \left\{ (-x+5) - \frac{4}{x} \right\} dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 4\log x \right]_1^4$$

$$= (-8+20-4\log 4) - \left(-\frac{1}{2} + 5 \right)$$

$$= \frac{15}{2} - 8\log 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。よって、①、②より、

$$M = \frac{15}{2} \cdot \frac{(1-k)^2}{k^2+1} - \frac{15}{2} + 8\log 2$$

$$= \frac{15}{2} \cdot \left(1 - \frac{2k}{k^2+1} \right) - \frac{15}{2} + 8\log 2$$

$$= -\frac{15k}{k^2+1} + 8\log 2$$

となる。

(答) $M = -\frac{15k}{k^2+1} + 8\log 2$

(4)

$$M(k) = -\frac{15k}{k^2+1} + 8\log 2$$

とおくと、

$$M'(k) = -\frac{15(k^2+1) - 15k \cdot 2k}{(k^2+1)^2}$$

$$= 15 \cdot \frac{k^2-1}{(k^2+1)^2}$$

$$= 15 \cdot \frac{(k-1)(k+1)}{(k^2+1)^2}$$

となる。 $k=-1$ のとき、 $M'(k)=0$ となるので、関数 $M(k)$ の増減表は以下のようになる。

k	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$M'(k)$	$+$	0	$-$	
$M(k)$	$\nearrow$	最大値	$\searrow$	

よって、上の増減表より、 $k=-1$ のとき、関数 $M(k)$ は最大値をとり、その値は、

$$M(-1) = \frac{15}{2} + 8\log 2$$

である。

(答) 最大値： $\frac{15}{2} + 8\log 2$

(1)

$${}_pC_k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

$$= \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

$$\Leftrightarrow k! {}_pC_k = p(p-1)\cdots(p-k+1)$$

である。ここで、 p は素数であり、 $1 \leq k \leq p-1$ であるので、 p と $k!$ は互いに素である。また、 ${}_pC_k$ は整数である。よって、 ${}_pC_k$ は p の倍数である。

(証明終)

(2)

自然数 n について、 $n^p - n$ は p で割り切れることを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$1^p - 1 = 0$$

より、このとき $n^p - n$ は p で割り切れることが示せた。

[2] $n=l$ のとき

このとき、

$$l^p - l = pm \quad (\text{ただし、} m \text{ は整数}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となると仮定する。 $n=l+1$ のとき

$$(l+1)^p - (l+1)$$

について、二項定理を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} (l+1)^p - (l+1) &= \sum_{k=0}^p {}_pC_k \cdot l^k \cdot 1^{p-k} - l - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} {}_pC_k \cdot l^k + {}_pC_0 \cdot l^0 \cdot 1^p + {}_pC_p \cdot l^p \cdot 1^0 - l - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} {}_pC_k \cdot l^k + 1 + l^p - l - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} {}_pC_k \cdot l^k + l^p - l \end{aligned}$$

となる。ここで(1)より、 $1 \leq k \leq p-1$ のとき ${}_pC_k$ は p の倍数であるから

$$\sum_{k=1}^{p-1} {}_pC_k \cdot l^k = pm' \quad (\text{ただし、} m' \text{ は整数}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

とおける。①、②より、

$$(l+1)^p - (l+1) = p(m+m')$$

であるから、このとき $n^p - n$ は p で割り切れることが示せた。

以上[1], [2]より、自然数 n について、 $n^p - n$ は p で割り切れることが示せた。

(証明終)

(3)

(2)より、 m^* を整数として

$$n^p - n = pm^*$$

$$\Leftrightarrow n(n^{p-1} - 1) = pm^*$$

とおける。 n は p の倍数ではないので、 $n^{p-1} - 1$ が p の倍数となる。よって、 $n^{p-1} - 1$ は p で割り切れる。

(証明終)

3

(1)

$$h(x)=\log x+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、関数 $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$h'(x)$	↘	-	0	+
$h(x)$	↘	↘	最小	↗

上の表より、関数 $h(x)$ は $x>0$ のとき、 $x=\frac{1}{4}$ で最小値を取る。

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{4}\right) &= \log \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \\ &= -2\log 2 + 2 \\ &= 2(1-\log 2) \end{aligned}$$

であり、 $e>2$ より、 $1-\log 2>0$ であるので、関数 $h(x)$ は $x>0$ において常に

$$h(x)>0$$

である。よって、

$$\Leftrightarrow \log x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\therefore \log x > -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

が成り立つ。よって、 $|x|>0$ に対して

$$\log|x| > -\frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

である。 $0<|x|<1$ のときを考えると

$$-\frac{1}{\sqrt{|x|}} < \log|x| < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < |\log|x|| < \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

であり、辺々に $|x|$ をかけると

$$0 < f(x) < \sqrt{|x|}$$

である。

$$\lim_{x \rightarrow 10} \sqrt{|x|} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 0$ となる。よって、関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続

である。

(証明終)

(2)

関数 $f(x)$ について、 x の範囲に注意して絶対値を外すと、

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & (1 \leq x) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -x \log x & (0 < x < 1) & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x \log(-x) & (-1 < x < 0) & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ -x \log(-x) & (x \leq -1) & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ 0 & (x=0) & \cdots \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ はそれぞれ y 軸に関して線対称であるので、 $x>0$ について考えていけばよい。

[1] $1 \leq x$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x \log x \\ f'(x) &= \log x + 1 \end{aligned}$$

であり、 $f'(x)$ は常に正であるので、 $f(x)$ は単調増加する。

[2] $0 < x < 1$ のとき

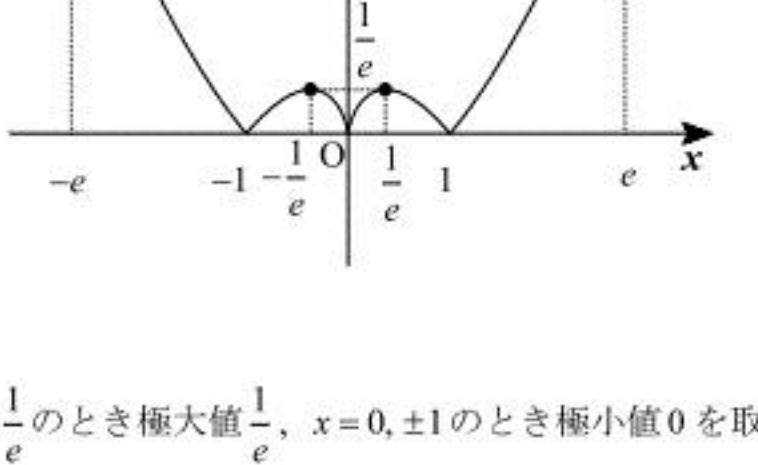
このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \log x \\ f'(x) &= -\log x - 1 \end{aligned}$$

であり、 $x=\frac{1}{e}$ のとき、 $f'(x)=0$ となる。よって、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1
$f'(x)$	↘	+	0	-	
$f(x)$	↘	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

以上、[1]、[2]および y 軸対称より、関数 $f(x)$ の概形は以下のようになる。



また、極値は、 $x=\pm\frac{1}{e}$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$ 、 $x=0, \pm 1$ のとき極小値0を取る。

(答) 極大値 $\frac{1}{e}$ ($x=\pm\frac{1}{e}$)、極小値0 ($x=0, \pm 1$)、前図

(3)

$x=0$ のとき明らかに $f(x) \neq g(x)$ である。関数 $g(x)$ は y 軸対称なので、 $x>0$ について考える。

$$i(x) = f(x) - g(x)$$

とする。

[1] $x>1$ のとき

このとき(2)より

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ g(x) &< 0 \end{aligned}$$

であるから

$$i(x) > 0$$

である。

[2] $x=1$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} i(1) &= f(1) - g(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

[3] $0 < x < 1$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} i(x) &= -x \log x + x^2 - 1 \\ i'(x) &= 2x - \log x - 1 \end{aligned}$$

$$i''(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

である。このとき $i'(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$i''(x)$	↘	-	0	+	↘
$i'(x)$	↘	↘	$\log 2$	↗	↘

$0 < x < 1$ において、増減表より、

$$i'(x) \geq i'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \log 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $i(x)$ は単調増加する。従って

$$\begin{aligned} i(x) &< i(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

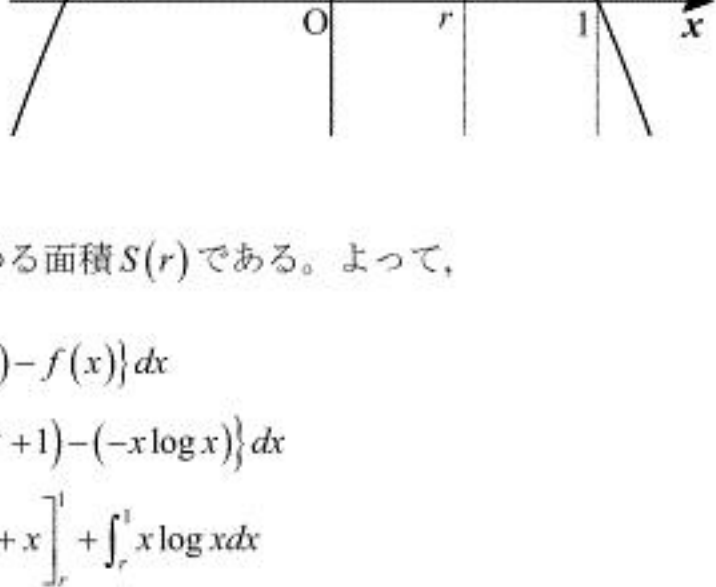
以上[1]、[2]、[3]より、

$$\begin{cases} f(x) > g(x) & (x > 1) \\ f(x) = g(x) & (x = 1) \\ f(x) < g(x) & (0 < x < 1) \end{cases}$$

であるから、 $x>0$ において $f(x)=g(x)$ となるのは $x=1$ のときのみであり、同様に $x<0$ において $f(x)=g(x)$ となるのは $x=-1$ のときのみである。

(証明終)

(4)



上図の斜線部が、求める面積 $S(r)$ である。よって、

$$\begin{aligned} S(r) &= \int_r^1 \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_r^1 \{(-x^2 + 1) - (-x \log x)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_r^1 + \int_r^1 x \log x dx \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}r^3 - r + \left[\frac{1}{2}x^2 \log x \right]_r^1 - \int_r^1 \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}r^3 - r - \frac{1}{2}r^2 \log r - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_r^1 \\ &= \frac{5}{12} + \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^2 \log r + \frac{1}{4}r^2 - r \end{aligned}$$

となる。(1)より、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

なので、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x = 0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +0} S(r) &= \lim_{r \rightarrow +0} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^2 \log r + \frac{1}{4}r^2 - r \right) \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{12}$