

(ア)の条件より、 k を整数として、

$$y = kx$$

とおける。これを(ウ)の条件に代入して、

$$x^2 + 6! = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 720 = k^2 x^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 = 720$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $k^2 - 1$ は平方数ではないから、 x^2 のとりうる値は

$$x^2 = 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 12^2$$

である。①より、それぞれで k^2 のとる値を考えると

$$k^2 - 1 = 180, 80, 45, 20, 5$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 181, 81, 46, 21, 6$$

となるため、 k が整数であるという条件を満たすのは

$$k^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow k = \pm 9$$

のみである。このとき、

$$x^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because \text{条件(イ)})$$

である。以上より、

$$(x, y) = (3, 27), (3, -27)$$

となる。

(答) $(x, y) = (3, 27), (3, -27)$

(1)

$$\begin{aligned}
 \cos 2x - \cos x &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, 1
 \end{aligned}$$

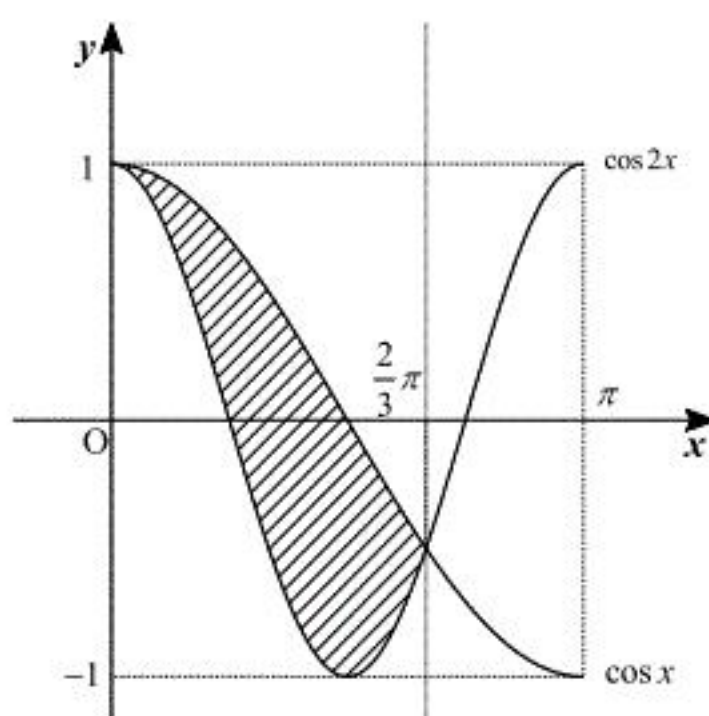
となり、 $0 \leq x \leq \pi$ より、

$$x = 0, \frac{2}{3}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = 0, \frac{2}{3}\pi$$

(2)



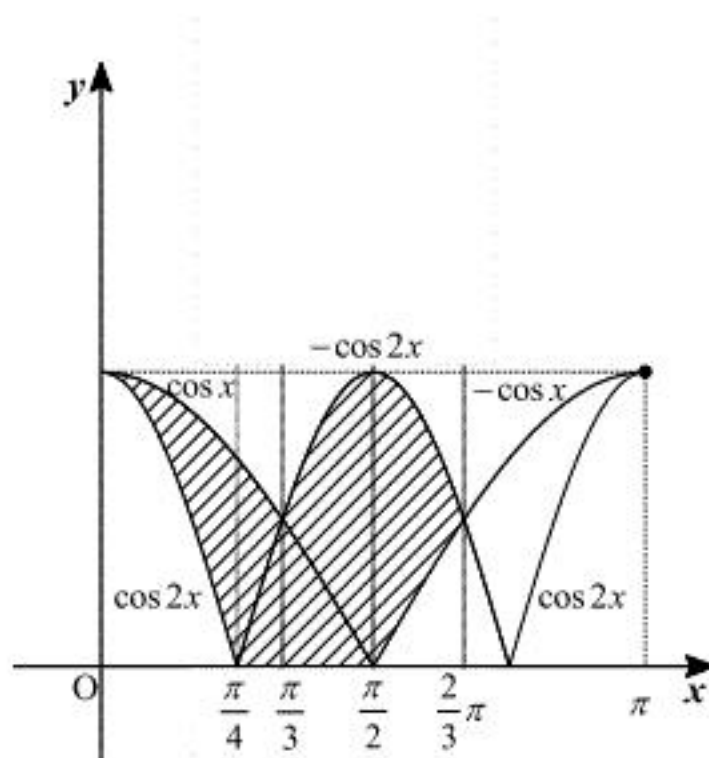
上図の斜線部が求める面積 S である。よって、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos x - \cos 2x) dx \\
 &= \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\
 &= \sin \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \sin \frac{4}{3}\pi \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(3)



(2)より、求める体積 V は上図の斜線部を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積である。よって、

$$V = \pi \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-\cos 2x)^2 dx - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (-\cos x)^2 dx \right\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C_1 \quad \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 2x dx &= \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C_2 \quad \cdots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

である。ただし、 C_1, C_2 は積分定数である。よって、①式は②、③より、

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\
 \Leftrightarrow \frac{2V}{\pi} &= \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\pi}{4} + \left\{ \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right\} - \left\{ \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \right\} \\
 \Leftrightarrow \frac{2V}{\pi} &= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{2V}{\pi} &= \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \\
 \therefore V &= \frac{(\pi + 3\sqrt{3})\pi}{8}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{(\pi + 3\sqrt{3})\pi}{8}$$

3

(1)

$$g(x)=\log x+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、関数 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$			最小	

上の表より、関数 $g(x)$ は $x>0$ のとき、 $x=\frac{1}{4}$ で最小値を取る。

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{4}\right) &= \log \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \\ &= -2\log 2 + 2 \\ &= 2(1-\log 2) \end{aligned}$$

であり、 $e>2$ より、 $1-\log 2>0$ であるので、関数 $g(x)$ は $x>0$ において常に

$$g(x)>0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log x + \frac{1}{\sqrt{x}} &> 0 \\ \therefore \log x &> -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$h(x)=x-\log x$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

であり、(1)と同様にして、関数 $h(x)$ の増減表を求めると以下のようになる。

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$			最小	

増減表より関数 $h(x)$ は、 $x=1$ のとき最小値を取り、

$$\begin{aligned} h(1) &= 1 - \log 1 \\ &= 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、(1)と同様にして、

$$\begin{aligned} h(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow x - \log x &> 0 \\ \therefore \log x &< x \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、(1)より、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{x}} &< \log x < x \\ \Leftrightarrow -x\sqrt{x} &< x^2 \log x < x^3 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (-x\sqrt{x}) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} (x^3) &= 0 \end{aligned}$$

であるので、はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=0$ となる。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x(2\log x + 1) \end{aligned}$$

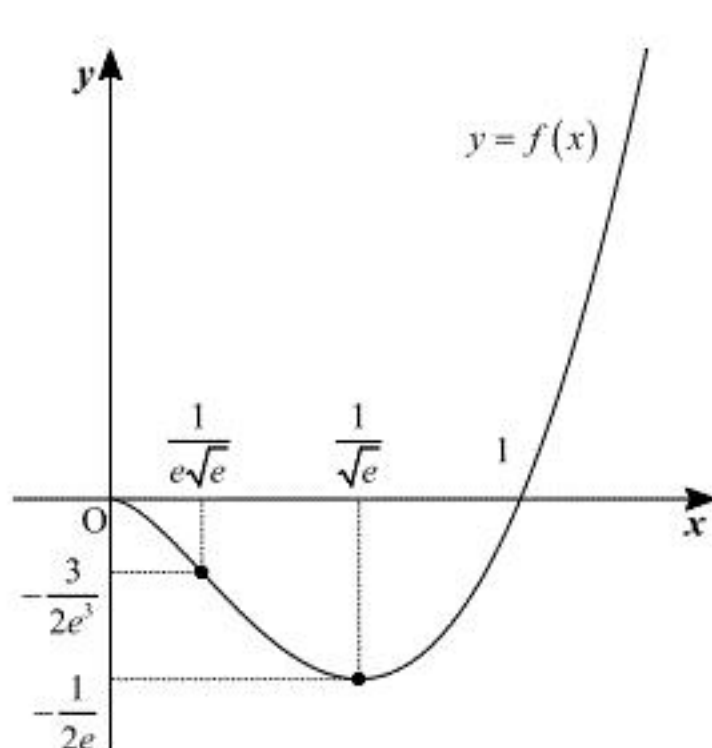
$$\begin{aligned} f''(x) &= (2\log x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} \\ &= 2\log x + 3 \end{aligned}$$

である。 $x>0$ において、 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ のときに $f'(x)=0$ となり、 $x=\frac{1}{e\sqrt{e}}$ のときに $f''(x)=0$ となる

るので、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	...
$f'(x)$		-	-	-	0	+
$f''(x)$		-	0	+	+	+
$f(x)$						

(2)と上の増減表より、 $y=f(x)$ の概形は以下のようになる。



(答) 前図

(4)

部分積分を用いると、

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_t^2 f(x) dx \\ &= \int_t^2 \left(\frac{1}{3} x^3 \right)' \log x dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x^3 \log x \right]_t^2 - \frac{1}{3} \int_t^2 x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x^3 \log x - \frac{1}{3} x^3 \right]_t^2 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(8 \log 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(t^3 \log t - \frac{1}{3} t^3 \right) \right\} \\ &= \frac{8}{3} \log 2 - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} t^3 \log t + \frac{1}{9} t^3 \end{aligned}$$

となる。ここで、(2)より、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} t^2 \log t &= 0 \\ \therefore \lim_{t \rightarrow +0} t^3 \log t &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{t \rightarrow +0} I(t) = \frac{8}{3} \log 2 - \frac{8}{9}$$

となる。

(答) $\lim_{t \rightarrow +0} I(t) = \frac{8}{3} \log 2 - \frac{8}{9}$