

1

(1)

$$f_1(1)=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$$

である。ここで、 $t=\tan\theta$ とおくと、 $dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり、

t	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

であるから、置換積分を用いて、

$$\begin{aligned}f_1(1)&=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。

(答) $f_1(1)=\frac{\pi}{4}$

(2)

$h(t)=\frac{1}{t^2+1}$ とおき、 $H(t)$ を関数 $h(t)$ の原始関数とする。このとき、

$$\begin{aligned}g(x)&=f_1\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\int_0^{\frac{1}{x}}h(t)dt\\&=H\left(\frac{1}{x}\right)-H(0)\end{aligned}$$

であり、両辺 x で微分すると、

$$\begin{aligned}g'(x)&=H'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'\\&=h\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=-\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned}f_1'(x)+g'(x)&=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\\&=0\end{aligned}$$

であり、両辺 x で積分すると、積分定数 C を用いて、

$$f_1(x)+g(x)=C$$

と表せる。ここで、(1)より、 $f_1(1)=\frac{\pi}{4}$ であり、

$$g(1)=f_1(1)$$

なので、

$$\begin{aligned}f_1(x)+g(x)&=C\\&\Leftrightarrow f_1(1)+g(1)=C\\&\therefore C=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である。よって、

$$f_1(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$$

が示せた。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$f_1(x)=\frac{\pi}{2}-g(x)$$

である。また、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty}g(x)&=\lim_{x\rightarrow\infty}f_1\left(\frac{1}{x}\right)\\&=f_1(0)\\&=0\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty}f_1(x)&=\lim_{x\rightarrow\infty}\left\{\frac{\pi}{2}-g(x)\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{x\rightarrow\infty}f_1(x)=\frac{\pi}{2}$

(4)

$$f_n(x)=\int_0^x\frac{1}{\left(t^2+1\right)^n}dt$$

について、部分積分を用いると、

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\int_0^x(t)'\cdot\frac{1}{\left(t^2+1\right)^n}dt\\&=\left[t\cdot\frac{1}{\left(t^2+1\right)^n}\right]_0^x-\int_0^xt\cdot\frac{-2nt}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}dt\\&=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+2n\int_0^x\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}dt\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}&=\frac{\left(t^2+1\right)-1}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}\\&=\frac{1}{\left(t^2+1\right)^n}-\frac{1}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+2n\int_0^x\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}dt\\&=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+2n\left\{\int_0^x\frac{1}{\left(t^2+1\right)^n}dt-\int_0^x\frac{1}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}dt\right\}\\&=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+2nf_n(x)-2nf_{n+1}(x)\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(5)

(4)より、

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+2nf_n(x)-2nf_{n+1}(x)\\&\therefore f_{n+1}(x)=\frac{2n-1}{2n}f_n(x)+\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $n\geq 1$ のとき、

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}=0$$

より、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty}f_n(x)&=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{2n-3}{2(n-1)}f_{n-1}(x)\\&=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{2n-5}{2(n-2)}\cdots\cdots\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\lim_{x\rightarrow\infty}f_1(x)\end{aligned}$$

である。また、(3)より、

$$\lim_{x\rightarrow\infty}f_1(x)=\frac{\pi}{2}$$

なので、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty}f_n(x)&=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{2n-5}{2(n-2)}\cdots\cdots\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\lim_{x\rightarrow\infty}f_1(x)\\&=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{2n-5}{2(n-2)}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\frac{(2n-3)!}{(n-2)!(n-1)!}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\pi\end{aligned}$$

であり、

$${}_{2n-3}C_{n-1}=\frac{(2n-3)!}{(n-2)!(n-1)!}$$

より、

$$\lim_{x\rightarrow\infty}f_n(x)=\frac{{}_{2n-3}C_{n-1}}{2^{2n-2}}\pi$$

となる。

(証明終)

$$f(x+y) = pf(x) + qf(y) \quad \dots \textcircled{1}$$

とする。

(1)

(a)

①に、 $x=y=0$ を代入すると、

$$f(0) = pf(0) + qf(0)$$

となる。 $f(0) \neq 0$ なので、

$$p+q=1$$

である。

(証明終)

(b)

(a)より、①は、

$$f(x+y) = pf(x) + (1-p)f(y) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②に $y=0$ を代入すると、

$$f(x) = pf(x) + (1-p)f(0)$$

$$\Leftrightarrow (1-p)\{f(x) - f(0)\} = 0$$

である。

[1] $p=1$ のとき

このとき、(a)より $q=0$ だから

$$f(x+y) = f(x)$$

であり、これは全ての実数 y に対して成り立つから、 $f(x)$ は定数関数である。

[2] $p \neq 1$ のとき

このとき、

$$f(x) = f(0)$$

であるから、 $f(x)$ は定数関数である。

以上[1],[2]より $f(x)$ は定数関数であることが示された。

(証明終)

(2)

(a)

①に、 $y=0$ を代入すると、

$$f(x) = pf(x) + qf(0)$$

$$\Leftrightarrow (1-p)f(x) = 0 \quad (\because f(0)=0)$$

となる。これが全ての実数 x で成り立つとき、

$$p=1 \text{ または } f(x)=0$$

である。 $f(x)$ は定数関数でないから、

$$p=1$$

である。

(証明終)

(b)

(a)と同様にして、①に、 $x=0$ を代入すると、 $q=1$ となる。よって、①は、

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であり、③に、 $y=h$ を代入すると、

$$f(h) = f(x+h) - f(x)$$

となるので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) \\ &= a \end{aligned}$$

である。両辺 x で積分すると、積分定数 C を用いて、

$$f(x) = ax + C$$

である。 $f(0)=0$ であるから、

$$f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 0$$

$$\therefore f(x) = ax$$

である。

(答) $f(x) = ax$

(1)

2 次方程式 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$ の判別式 D について、

$$\begin{aligned} D &= (a+c)^2 - 4(ac-b^2) \\ &= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 \\ &= (a-c)^2 + 4b^2 \\ &> 0 \quad (\because b \neq 0) \end{aligned}$$

となるので、異なる 2 つの実数解を持つことが示せた。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} (x+p)(x-\alpha) - (x+q)(x-\beta) &= 1 \\ \Leftrightarrow \{x^2 + (p-\alpha)x - p\alpha\} - \{x^2 + (q-\beta)x - q\beta\} &= 1 \\ \Leftrightarrow (p-q-\alpha+\beta)x - p\alpha + q\beta - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。上式は、 x について恒等式であるので、

$$p - q - \alpha + \beta = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-p\alpha + q\beta - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①と②より、 q を消去すると、

$$\begin{aligned} -p\alpha + (p - \alpha + \beta)\beta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow p(\beta - \alpha) + \beta^2 - \alpha\beta - 1 &= 0 \\ \therefore p &= \frac{1 + \alpha\beta - \beta^2}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

となり、同様にして、

$$q = \frac{1 - \alpha\beta + \alpha^2}{\beta - \alpha}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1 + \alpha\beta - \beta^2}{\beta - \alpha}, q = \frac{1 - \alpha\beta + \alpha^2}{\beta - \alpha}$$

(3)

正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - (a+c)A + (ac-b^2)E = O \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、(2)より、解と係数の関係から、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a + c \\ \alpha\beta = ac - b^2 \end{cases}$$

だから、③式は、

$$\begin{aligned} A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (\alpha + \beta)A - \alpha\beta E \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} B &= (A + pE)(A - \alpha E) \\ &= A^2 + (p - \alpha)A - p\alpha E \end{aligned}$$

であり、④より、

$$\begin{aligned} B &= \{(\alpha + \beta)A - \alpha\beta E\} + (p - \alpha)A - p\alpha E \\ &= (p + \beta)A - \alpha(p + \beta)E \\ &= (p + \beta)(A - \alpha E) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} B^2 &= (p + \beta)^2 (A - \alpha E)^2 \\ &= (p + \beta)^2 (A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 E) \\ &= (p + \beta)^2 \{(\alpha + \beta)A - \alpha\beta E - 2\alpha A + \alpha^2 E\} \\ &= (p + \beta)^2 \{(\beta - \alpha)A - \alpha(\beta - \alpha)E\} \\ &= (p + \beta)^2 (\beta - \alpha)(A - \alpha E) \end{aligned}$$

である。ここで、(2)より、 $p = \frac{1 + \alpha\beta - \beta^2}{\beta - \alpha}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} B^2 &= (p + \beta)^2 (\beta - \alpha)(A - \alpha E) \\ &= (p + \beta)(\beta - \alpha)(p + \beta)(A - \alpha E) \\ &= \left(\frac{1 + \alpha\beta - \beta^2}{\beta - \alpha} + \beta \right) (\beta - \alpha)(p + \beta)(A - \alpha E) \\ &= \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \right) (\beta - \alpha)(p + \beta)(A - \alpha E) \\ &= (p + \beta)(A - \alpha E) \\ &= B \end{aligned}$$

となるので、 $B^2 = B$ であることが示せた。

(証明終)