

1

(1)

$$g(x)=\log x+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、関数 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$			最小	

上の表より、関数 $g(x)$ は $x>0$ のとき、 $x=\frac{1}{4}$ で最小値を取る。

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{4}\right) &= \log \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \\ &= -2\log 2 + 2 \\ &= 2(1-\log 2) \end{aligned}$$

であり、 $e>2$ より、 $1-\log 2>0$ であるので、関数 $g(x)$ は $x>0$ において常に

$$g(x)>0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log x + \frac{1}{\sqrt{x}} &> 0 \\ \therefore \log x &> -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$h(x)=x-\log x$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

であり、(1)と同様にして、関数 $h(x)$ の増減表を求めると以下のようになる。

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$			最小	

増減表より関数 $h(x)$ は、 $x=1$ のとき最小値を取り、

$$\begin{aligned} h(1) &= 1 - \log 1 \\ &= 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、(1)と同様にして、

$$\begin{aligned} h(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow x - \log x &> 0 \\ \therefore \log x &< x \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、(1)より、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{x}} &< \log x < x \\ \Leftrightarrow -x\sqrt{x} &< x^2 \log x < x^3 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (-x\sqrt{x}) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} (x^3) &= 0 \end{aligned}$$

であるので、はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=0$ となる。

(証明終)

(3)

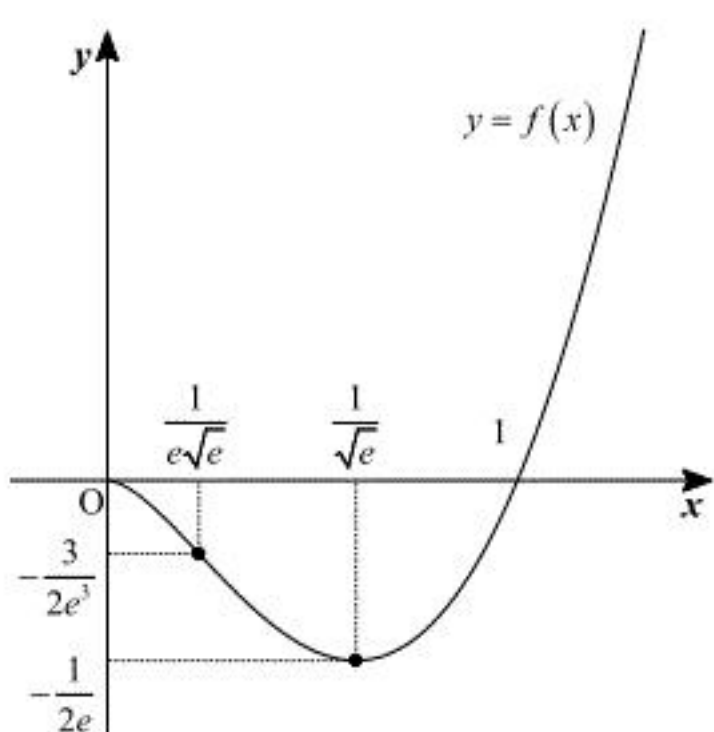
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x(2 \log x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2 \log x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} \\ &= 2 \log x + 3 \end{aligned}$$

である。 $x>0$ において、 $x=\frac{1}{e\sqrt{e}}$ のときに $f'(x)=0$ となり、 $x=\frac{1}{e\sqrt{e}}$ のときに $f''(x)=0$ となるので、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	...
$f'(x)$		-	-	-	0	+
$f''(x)$		-	0	+	+	+
$f(x)$			$\searrow$	$-\frac{3}{2e^3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$

(2)と上の増減表より、 $y=f(x)$ の概形は以下のようになる。



(答) 前図

(4)

部分積分を用いると、

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_t^2 f(x) dx \\ &= \int_t^2 \left(\frac{1}{3} x^3 \right)' \log x dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x^3 \log x \right]_t^2 - \frac{1}{3} \int_t^2 x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x^3 \log x - \frac{1}{3} x^3 \right]_t^2 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(8 \log 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(t^3 \log t - \frac{1}{3} t^3 \right) \right\} \\ &= \frac{8}{3} \log 2 - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} t^3 \log t + \frac{1}{9} t^3 \end{aligned}$$

となる。ここで、(2)より、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} t^2 \log t &= 0 \\ \therefore \lim_{t \rightarrow +0} t^3 \log t &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{t \rightarrow +0} I(t) = \frac{8}{3} \log 2 - \frac{8}{9}$$

となる。

(答) $\lim_{t \rightarrow +0} I(t) = \frac{8}{3} \log 2 - \frac{8}{9}$

(1)

三角関数の加法定理より、

$$\sin\left(k\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \sin k\theta \cos \frac{\theta}{2} + \cos k\theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \sin k\theta \cos \frac{\theta}{2} - \cos k\theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\cos\left(k\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \cos k\theta \cos \frac{\theta}{2} - \sin k\theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\cos\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos k\theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin k\theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。①-②より、

$$\begin{aligned} \sin\left(k\theta + \frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) &= 2\cos k\theta \sin \frac{\theta}{2} \\ \therefore \sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta &= \frac{1}{2} \left\{ -\sin\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right) + \sin\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right) \right\} \end{aligned}$$

となり、④-③より、

$$\begin{aligned} \cos\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(k\theta + \frac{\theta}{2}\right) &= 2\sin k\theta \sin \frac{\theta}{2} \\ \therefore \sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta &= \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right) - \cos\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right) \right\} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta &= \sum_{k=0}^n \left\{ -\sin\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right) + \sin\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right) \right\} \\ &= \left\{ -\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) + \sin\frac{\theta}{2} \right\} + \left\{ -\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3}{2}\theta \right\} + \cdots \\ &\quad + \left\{ -\sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) + \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \right\} + \left\{ -\sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) \right\} \\ &= -\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) \\ &= \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

である。 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ だから

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + \sin \frac{\theta}{2} \right\}$$

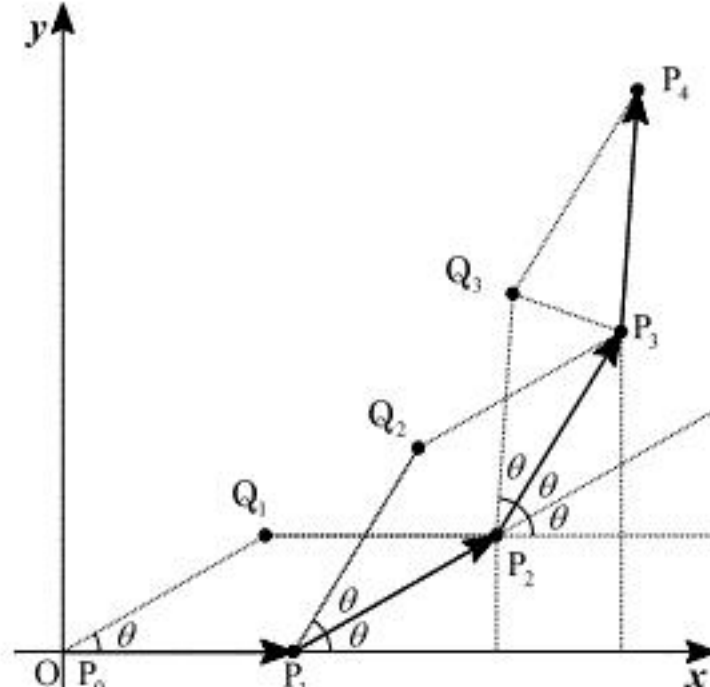
である。同様にして、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta &= \sum_{k=0}^n \left\{ \cos\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right) - \cos\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right) \right\} \\ &= \left\{ \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \cos\frac{\theta}{2} \right\} + \left\{ \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3}{2}\theta \right\} + \cdots \\ &\quad + \left\{ \cos\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) - \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \right\} + \left\{ \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) \right\} \\ &= \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) \\ &= -\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + \cos \frac{\theta}{2} \\ \therefore \sum_{k=0}^n \sin k\theta &= \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ -\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + \cos \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)



二次元空間の回転行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

を用いると、

$$\overrightarrow{P_{n-1}Q_n} = R(\theta)\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

と表せる。条件より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_nP_{n+1}} &= \overrightarrow{P_{n-1}Q_n} \\ &= R(\theta)\overrightarrow{P_{n-1}P_n} \\ &= R^n(\theta)\overrightarrow{P_0P_1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{P_kP_{k+1}} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、(2)より、

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \sin \frac{\theta}{2} \right\} \\ y_n = \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ -\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \cos \frac{\theta}{2} \right\} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} x_n = \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \sin \frac{\theta}{2} \right\} \\ y_n = \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ -\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \cos \frac{\theta}{2} \right\} \end{cases}$$

(4)

(3)より、

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_n = \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \sin \frac{\theta}{2} \right\} \\ y_n = \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ -\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \cos \frac{\theta}{2} \right\} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) = 2\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)x_n - \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) = -2\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)y_n + \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + \cos^2\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \left\{ 2\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)x_n - \sin \frac{\theta}{2} \right\}^2 + \left\{ -2\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)y_n + \cos \frac{\theta}{2} \right\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_n - \frac{1}{2\tan \frac{\theta}{2}}\right)^2 &= \frac{1}{4\sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

である。従って、全ての点 P_n を通る円の方程式は

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\tan \frac{\theta}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

である。

$$(\text{答}) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\tan \frac{\theta}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

(1)

等式の左辺を計算すると,

$$\begin{aligned} A^2 - T(A)A + \Delta(A)E &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$A^2 - T(A)A + \Delta(A)E = O$$

が示せた。

(証明終)

(2)

(a)

ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$X^2 - \alpha X + \beta E = O$$

$$\therefore X^2 = \alpha X - \beta E$$

である。両辺の右から Y をかけると,

$$X^2 Y = \alpha XY - \beta Y \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり, 両辺の左から Y をかけると,

$$YX^2 = \alpha YX - \beta Y \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より,

$$\begin{aligned} X^2 Y - YX^2 &= \alpha (XY - YX) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X^2 Y - YX^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

(a)より,

$$\begin{aligned} (X^2 Y - YX^2)^2 &= E \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} &= E \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \therefore \alpha^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって, $\alpha = \pm 1$ である。また, ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$X^2 = \alpha X - \beta E$$

であるので,

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + E &= O \\ \Leftrightarrow (\alpha X - \beta E)^2 + (\alpha X - \beta E) + E &= O \\ \Leftrightarrow X^2 - 2\alpha\beta X + \beta^2 E + \alpha X - \beta E + E &= O \quad (\because \alpha^2 = 1) \\ \Leftrightarrow (\alpha X - \beta E) - 2\alpha\beta X + \beta^2 E + \alpha X - \beta E + E &= O \\ \Leftrightarrow -2\alpha(\beta - 1)X + (\beta^2 - 2\beta + 1)E &= O \\ \Leftrightarrow (\beta - 1)\{-2\alpha X + (\beta - 1)E\} &= O \end{aligned}$$

と変形出来る。ここで $X = kE$ (k は実数) と仮定すると,

$$\begin{aligned} XY - YX &= kY - kY \\ &= O \end{aligned}$$

となり,

$$XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と矛盾する。従って, $X \neq kE$ であるから, $X^4 + X^2 + E = O$ のとき,

$$\beta = 1$$

である。以上より, 条件を満たす α, β は,

$$(\alpha, \beta) = (1, 1), (-1, 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (\alpha, \beta) = (1, 1), (-1, 1)$$