

理学部数学科試験問題

数 学

注 意

1. 開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は1ページから3ページにわたっています。解答用紙は3枚、計算用紙は1枚で、問題冊子とは別になっています。試験開始の合図があってから直ちに確認し、不備がある場合は監督者に申し出て下さい。
3. 各解答用紙には志望学部を書く欄が1か所と受験番号を書く欄が2か所あります。もれなく記入して下さい。
4. 解答は指定された解答用紙に記入して下さい。その際、解答用紙の番号を間違えないようにして下さい。指定された解答用紙以外に記入した解答は、評価（採点）の対象としません。
5. 解答用紙の裏面には解答を書いてはいけません。解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は、評価（採点）の対象としません。
6. 解答用紙は一切持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子、計算用紙は持ち帰って下さい。

1 曲線 $C: y = \frac{4}{x}$ 上に 2 点 $P(1, 4)$, $Q(4, 1)$ をとる。直線 $l: y = kx$ ($k < 0$) に垂直な直線で P を通るものを l_P とし, Q を通るものを l_Q とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) l_P , l_Q の方程式を求めよ。
- (2) l_P と l の交点 R の x 座標を求めよ。また, l_Q と l の交点 S の x 座標を求めよ。
- (3) C , l , l_P , l_Q で囲まれた図形の面積 M を求めよ。
- (4) k を動かすとき, M の最大値を求めよ。

(解答用紙は, 1 を使用せよ)

数 1

2 p を素数とすると、次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 k が $1 \leq k \leq p-1$ を満たすとき、 ${}_pC_k$ は p で割り切れることを示せ。ただし、 ${}_pC_k$ は p 個のものから k 個取った組合せの総数である。
- (2) n を自然数とすると、 n に関する数学的帰納法を用いて、 $n^p - n$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) n が p の倍数でないとき、 $n^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ。

(解答用紙は、**2** を使用せよ)

数 2

3 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} |x \log |x|| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$
$$g(x) = -x^2 + 1$$

により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $\log x > -\frac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示し、これを用いて $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ。
- (2) $f(x)$ の極値を求め、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (3) 方程式 $f(x) = g(x)$ の解は $x = -1, 1$ のみであることを示せ。
- (4) $0 < r < 1$ とする。曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ によって囲まれた図形のうち、 $x \geq r$ の範囲の部分の面積を $S(r)$ とおく。このとき、 $\lim_{r \rightarrow +0} S(r)$ を求めよ。

(解答用紙は、**3** を使用せよ)

数 3