

医学部医学科試験問題

数 学

注 意

1. 開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は1ページから3ページにわたっています。解答用紙は3枚、計算用紙は1枚で、問題冊子とは別になっています。試験開始の合図があってから直ちに確認し、不備がある場合は監督者に申し出て下さい。
3. 各解答用紙には志望学部を書く欄が1か所と受験番号を書く欄が2か所あります。もれなく記入して下さい。
4. 解答は指定された解答用紙に記入して下さい。その際、解答用紙の番号を間違えないようにして下さい。指定された解答用紙以外に記入した解答は、評価（採点）の対象としません。
5. 解答用紙の裏面には解答を書いてはいけません。解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は、評価（採点）の対象としません。
6. 解答用紙は一切持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子、計算用紙は持ち帰って下さい。

ひ 1 自然数 n に対して, $f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$ とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f_1(1)$ を求めよ。

(2) $g(x) = f_1\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく。 $g'(x)$ を求め, $x > 0$ のとき

$$f_1(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x)$ を求めよ。

(4) 部分積分法を用いて,

$$f_n(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nf_n(x) - 2nf_{n+1}(x)$$

が成り立つことを示せ。

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{2n-3}{2^{2n-2}} \pi$ ($n \geq 2$) であることを示せ。ただし, ${}_m C_k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ とする。

(解答用紙は, 1 を使用せよ)

医 1

2 微分可能な関数 $f(x)$ と 2 つの定数 p, q が次の条件を満たすとする。

「すべての実数 x, y に対して、 $f(x+y) = pf(x) + qf(y)$ が成り立つ」

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(0) \neq 0$ とする。

(a) $p+q=1$ であることを示せ。

(b) $f(x)$ は定数関数であることを示せ。

(2) $f(0) = 0$ で $f(x)$ が定数関数でないとする。

(a) $p=1$ であることを示せ。

(b) $a = f'(0)$ とするとき、 $f(x)$ を a を用いて表せ。

(解答用紙は、**2** を使用せよ)

医 2

3 実数 a, b, c ($b \neq 0$) に対して、次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) の 2 つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。 x についての恒等式

$$(x+p)(x-\alpha) - (x+q)(x-\beta) = 1$$

が成り立つとき、定数 p, q を α, β を用いて表せ。

(3) 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ と (2) の α, p に対して、 $B = (A + pE)(A - \alpha E)$ とおく。このとき、 $B^2 = B$ であることを示せ。ただし、 E は 2 次の単位行列である。

(解答用紙は、**3** を使用せよ)

医 3