

(1)

加法定理より

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{5}{12} \pi &= \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \cdot \tan \frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} \\
 &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \\
 &= 2 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

である。

(答) $2 + \sqrt{3}$

(2)

 n が自然数のとき、(1)の結果より

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n} &< \tan \frac{5}{12} \pi < \sqrt{n+1} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{n} &< 2 + \sqrt{3} < \sqrt{n+1} \\
 \Leftrightarrow n &< (2 + \sqrt{3})^2 < n+1 \quad (\because n > 0) \\
 \Leftrightarrow n &< 7 + 4\sqrt{3} < n+1 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。 $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$ について

$$\begin{aligned}
 \sqrt{36} &< \sqrt{48} < \sqrt{49} \\
 \Leftrightarrow 6 &< \sqrt{48} < 7
 \end{aligned}$$

が成り立つことから、

$$13 < 7 + 4\sqrt{3} < 14$$

である。したがって、①を満たす自然数 n は

$$n = 13$$

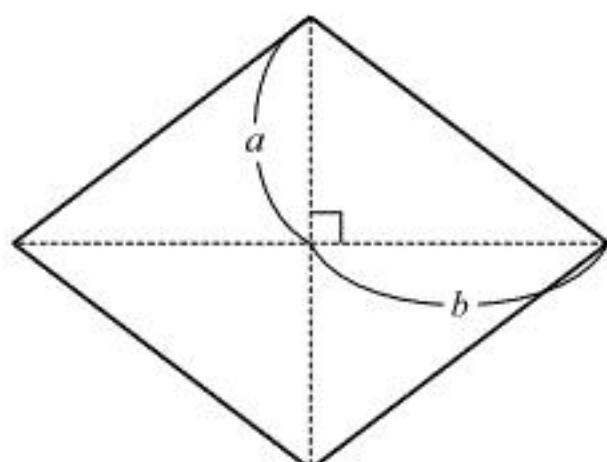
である。

(答) $n = 13$

2

(1)

ひし形 D の概形は以下の図のようになる。



ひし形 D の1辺の長さは三平方の定理より $\sqrt{a^2 + b^2}$ であるから、 D の周の長さ s は

$$s = 4\sqrt{a^2 + b^2}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad s = 4\sqrt{a^2 + b^2}$$

(2)

長方形 R の周の長さは x, y を用いて $2x + 2y$ と表せる。これが s に等しいことから

$$2x + 2y = 4\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow x + y = 2\sqrt{a^2 + b^2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、ひし形 D と長方形 R の面積が等しいことから

$$xy = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b$$

$$\Leftrightarrow xy = 2ab \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②より、解と係数の関係から x, y ($x \leq y$) は2次方程式

$$t^2 - (2\sqrt{a^2 + b^2})t + 2ab = 0$$

の正の実数解である。これを解いて

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{a^2 + b^2} \pm \sqrt{(a^2 + b^2) - 2ab} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \pm \sqrt{(a - b)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \pm |a - b| \end{aligned}$$

となる。 $x \leq y$ より

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 + b^2} - |a - b| \\ y = \sqrt{a^2 + b^2} + |a - b| \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} x = \sqrt{a^2 + b^2} - |a - b| \\ y = \sqrt{a^2 + b^2} + |a - b| \end{cases}$$

(3)

R の対角線の長さ ℓ は、①、②より

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(x + y)^2 - 2xy} \\ &= \sqrt{4(a^2 + b^2) - 4ab} \\ &= 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} \end{aligned}$$

である。 $\ell > 0, a + b > 0$ より、 ℓ と $a + b$ の大小を比較するには ℓ^2 と $(a + b)^2$ の大小を比較すればよい。

$$\begin{aligned} \ell^2 - (a + b)^2 &= 4(a^2 - ab + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 3a^2 - 6ab + 3b^2 \\ &= 3(a - b)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから、 a, b の値にかかわらず $\ell \geq a + b$ が成り立つ(等号成立は $a = b$ のとき)。

$$(\text{答}) \quad \ell \geq a + b \quad (\text{等号成立は } a = b \text{ のとき})$$

(4)

$$\begin{aligned} s &= 4 \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2 + b^2} &= 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned}$$

である。また、 $a > 0, b > 0$ であるから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ を用いて

$$\begin{cases} a = \cos \theta \\ b = \sin \theta \end{cases}$$

と表せる。このとき、 ℓ は

$$\begin{aligned} \ell &= 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} \\ &= 2\sqrt{1 - \sin \theta \cos \theta} \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta} \end{aligned}$$

である。 $0 < 2\theta < \pi$ より

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2} \sin 2\theta &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq 1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta < 1 \end{aligned}$$

であるから、 ℓ のとりうる値の範囲は

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} &\leq \ell < 2 \cdot \sqrt{1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} &\leq \ell < 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{2} \leq \ell < 2$$

(1)

三角関数の合成より

$$\begin{aligned} t &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ であるから

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq t \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

(2)

 $f(x)$ を $\sin x$ と $\cos x$ で表すと

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 3x - \cos 3x + 3 \sin 2x \\ &= (3 \sin x - 4 \sin^3 x) - (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6 \sin x \cos x \\ &= 3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x) + 6 \sin x \cos x \end{aligned}$$

である。 $t = \sin x + \cos x$ より

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin x + \cos x)^2 \\ &= 1 + 2 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x \cos x &= \frac{t^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} t^3 &= (\sin x + \cos x)^3 \\ &= \sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) \\ &= \sin^3 x + \cos^3 x + 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \cdot t \\ \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x &= t^3 - \frac{3}{2}t(t^2 - 1) \\ &= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

である。したがって、 $f(x)$ を t の関数として表すと

$$\begin{aligned} f(x) &= 3t - 4\left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t\right) + 6 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \\ &= 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(x) = 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3$

(3)

$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) とおくと、 $f(x)$ の最小値は $g(t)$ の最小値と等しい。このとき、導関数 $g'(t)$ は

$$\begin{aligned} g'(t) &= 6t^2 + 6t - 3 \\ &= 6\left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right) \\ &= 6\left\{t - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{t - \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$-\sqrt{2} < 0 < \sqrt{2}, \quad \begin{cases} g'(-\sqrt{2}) = 9 - 6\sqrt{2} (> 0) \\ g'(0) = -3 (< 0) \\ g'(\sqrt{2}) = 9 + 6\sqrt{2} (> 0) \end{cases}$$

であることに注意すると、 $g(t)$ の $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ における増減表は以下のようになることがわかる。

t	$-\sqrt{2}$	...	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	...	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
$g(t)$	$g(-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$	$g\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$	$\nearrow$	$g(\sqrt{2})$

増減表より、 $g(t)$ の最小値は $g(-\sqrt{2})$ または $g\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ である。ここで

$$\begin{aligned} g(t) &= 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3 \\ &= 2t\left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right) + t^2 - 2t - 3 \\ &= 2t \cdot \frac{1}{6}g'(t) + \left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right) - 3t - \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{3}tg'(t) + \frac{1}{6}g'(t) - 3t - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $g\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ は

$$\begin{aligned} g\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) &= -3\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{5}{2} \\ &= -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} g(-\sqrt{2}) &= 2(-\sqrt{2})^3 + 3(-\sqrt{2})^2 - 3(-\sqrt{2}) - 3 \\ &= -4\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} - 3 \\ &= 3 - \sqrt{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $g(t)$ の最小値は $g\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ である。したがって、 $f(x)$ は $t = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

のとき最小値 $-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(答) $-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$