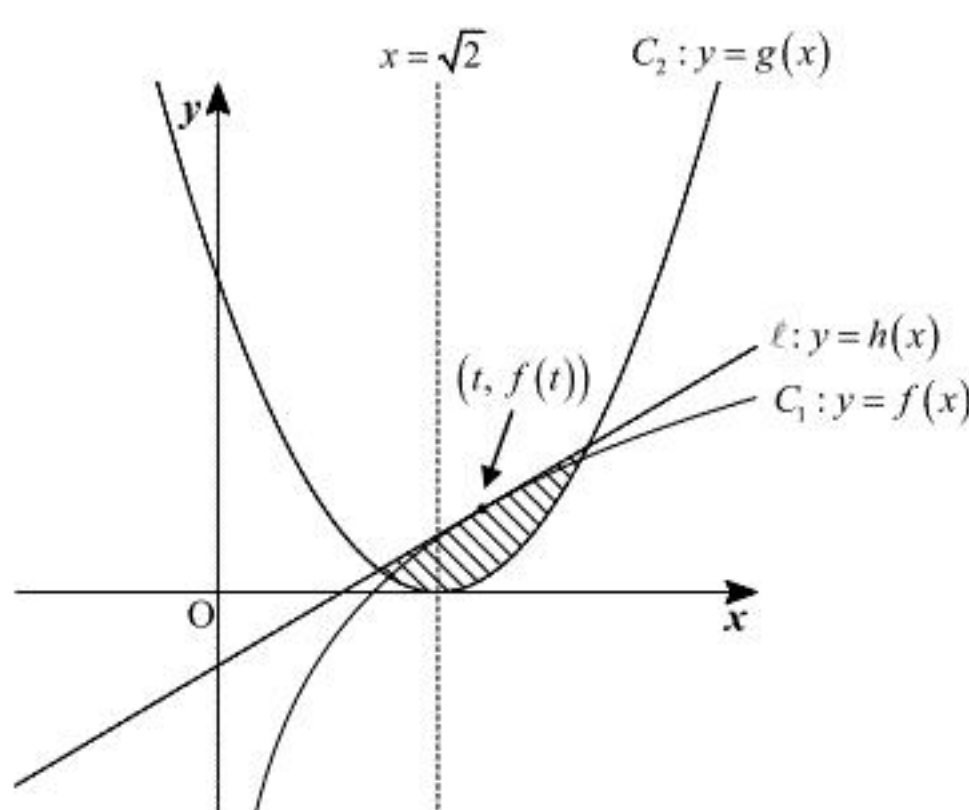


(1)

曲線 C_1, C_2, ℓ を表す式について、関数 $f(x), g(x), h(x)$ を用いて

$$C_1: y = f(x), C_2: y = g(x), \ell: y = h(x)$$

とおく。



曲線 $C_1: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線が ℓ であるから、この直線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) \Leftrightarrow y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$$

である。ここで、関数 $i(x)$ を $i(x) = g(x) - h(x)$ とおくと、

$$i(x) = (x - \sqrt{2})^2 - \left\{ \frac{1}{t}(x-t) + \log t \right\} = x^2 - \left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right)x + 3 - \log t$$

となるから、 $i(x)$ は2次関数であり、 $y = i(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。さて、曲線 C_1 は上に凸であることから、接線 ℓ との位置関係について、

$$\text{任意の実数 } x \text{ で } f(x) \leq h(x) \text{ が成り立つ}$$

ことがわかる。そこで、 $x = \sqrt{2}$ のときを考えると、 $f(\sqrt{2}) = \log \sqrt{2}$ 、 $g(\sqrt{2}) = 0$ であることから

$$g(\sqrt{2}) < f(\sqrt{2}) \leq h(\sqrt{2})$$

$$\therefore i(\sqrt{2}) = (g(\sqrt{2}) - h(\sqrt{2})) < 0$$

であることがわかる。したがって、下に凸の放物線 $y = i(x)$ の頂点の y 座標は負であるから、2次方程式 $i(x) = 0$ は異なる2つの実数解を持つ。そして、2次方程式 $i(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ とおき、異なる2つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと

$$D(t) = \left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right)^2 - 4(3 - \log t) = 4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4$$

$$\alpha = \frac{\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right) - \sqrt{D(t)}}{2}, \beta = \frac{\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right) + \sqrt{D(t)}}{2}$$

となる。最後に、直線 ℓ と曲線 C_2 で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{h(x) - g(x)\} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} i(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6} \{D(t)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore S = \frac{1}{6} \left(4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4 \right)^{\frac{3}{2}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{6} \left(4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4 \right)^{\frac{3}{2}}$$

(2)

(1)における考察より、 $S = \frac{1}{6} \{D(t)\}^{\frac{3}{2}}$ と表せるから、 S を最小にする t の値と $D(t)$ を最小にする t の値は一致する。ここで、関数 $D(t)$ の導関数は

$$D'(t) = \left(4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4 \right)' = \frac{4}{t} - \frac{4\sqrt{2}}{t^2} - \frac{2}{t^3} = \frac{4 \left(t - \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{2}-2}{2} \right)}{t^3}$$

であるから、 $D(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}+2}{2}$	...
$D'(t)$		-	0	+
$D(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

したがって、求める t の値は $t = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

(1)

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \{(b-x)f(a) + (x-a)f(b)\}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{1}{b-a} \cdot (b-a)f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \frac{1}{b-a} \cdot (b-a)f(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり, 区間 (a, b) で

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$g''(x) = f''(x)$$

となる。区間 (a, b) で $f''(x) < 0 \Leftrightarrow g''(x) < 0$ となることから, $g'(x)$ は単調減少関数である。

また, $g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続かつ区間 (a, b) で微分可能であることから, 平均値の定理より

$$a < p < b$$

および

$$\begin{aligned} g'(p) &= \frac{g(b) - g(a)}{b-a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を満たす実数 p が存在する。したがって, 区間 $[a, b]$ における $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	a	$\cdots$	p	$\cdots$	b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(p)$	$\searrow$	0

増減表より $a < x < b$ において

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{b-a} \{(b-x)f(a) + (x-a)f(b)\} &> 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &> \frac{1}{b-a} \{(b-x)f(a) + (x-a)f(b)\} \end{aligned}$$

であるから題意が示された。

(証明終)

(2)

$$h(x) = f'(c)(x-c) + f(c) - f(x)$$

とおくと, 区間 (a, b) で

$$h'(x) = f'(c) - f'(x)$$

$$h''(x) = -f''(x)$$

となる。区間 (a, b) で $f''(x) < 0 \Leftrightarrow h''(x) > 0$ となることから, $h'(x)$ は単調増加関数である。

したがって,

$$h(c) = 0$$

$$h'(c) = 0$$

に注意すると区間 $[a, b]$ における $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$h(b)$

増減表より $a < x < b$ において

$$\begin{aligned} h(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow f'(c)(x-c) + f(c) - f(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &\leq f'(c)(x-c) + f(c) \end{aligned}$$

であるから題意が示された。

(証明終)

(1)

$$a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}^{\frac{1}{n}} a_n^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geq 2)$$

の両辺について、 $a_n > 0$ より底が 2 の対数をとると

$$\begin{aligned} \log_2 a_1^{\frac{1}{n}} + \log_2 a_2^{\frac{1}{n}} + \cdots + \log_2 a_{n-1}^{\frac{1}{n}} + \log_2 a_n^{\frac{2}{n}} &= \log_2 8 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \log_2 a_1 + \frac{1}{n} \log_2 a_2 + \cdots + \frac{1}{n} \log_2 a_{n-1} + \frac{2}{n} \log_2 a_n &= 3 \\ \Leftrightarrow b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n &= 3n \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。このとき、 b_1 は

$$\begin{aligned} b_1 &= \log_2 2\sqrt{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であり、①の左辺を S_n とおくと

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 3(n+1) - 3n \\ \Leftrightarrow (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + 2b_{n+1}) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n) &= 3 \\ \Leftrightarrow 2b_{n+1} - b_n &= 3 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 3 &= \frac{1}{2}(b_n - 3) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_n - 3 &= \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - 3) \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3 \right) + 3 \\ \Leftrightarrow b_n &= -\frac{3}{2^n} + 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = -\frac{3}{2^n} + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2)

$c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき、

$$\begin{aligned} \log_2 c_n &= \log_2 a_1 a_2 \cdots a_n \\ &= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_{n-1} + \log_2 a_n \\ &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n \\ &= S_n - b_n \\ &= \frac{3}{2^n} + 3n - 3 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = 2^{\frac{3}{2^n} + 3n - 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

$$(\text{答}) \quad c_n = 2^{\frac{3}{2^n} + 3n - 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3)

(2)より

$$c_{11} = 2^{\frac{3}{2^{11}} + 30}$$

であるから、与えられた不等式について、常用対数をとることを考えて

$$\begin{aligned} 10^k &\leq c_{11} < 10^{k+1} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 10^k &\leq \log_{10} c_{11} < \log_{10} 10^{k+1} \\ \Leftrightarrow k &\leq \left(\frac{3}{2^{11}} + 30 \right) \log_{10} 2 < k+1 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ であることから

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2048} + 30 \right) \log_{10} 2 &= \frac{3}{2048} \cdot 0.3010 + 30 \cdot 0.3010 \\ &= \frac{0.903}{2048} + 9.03 \end{aligned}$$

$$\therefore 9 < \left(\frac{3}{2^{11}} + 30 \right) \log_{10} 2 < 10$$

となるため、②を満たす整数 k は

$$k = 9$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad k = 9$$