

(1)

曲線 $C_1: y = \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) と曲線 $C_2: y = 2 \sin x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) のグラフの交点の x 座標は

$$\tan x = 2 \sin x$$

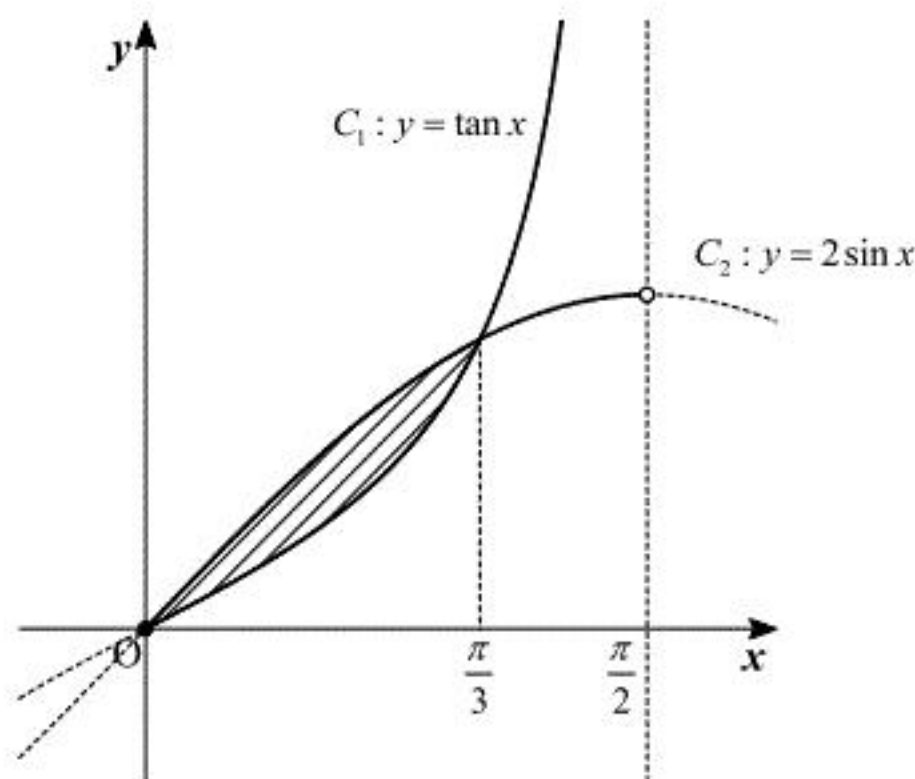
$$\Leftrightarrow \sin x = 2 \sin x \cos x \quad (\because \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ または } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 0, \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

であるから、曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた図形は以下の図の斜線部である。



求める回転体の体積は、上図の斜線部を x 軸の周りに1回転させた図形の体積に等しいため、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi \left\{ (2 \sin x)^2 - \tan^2 x \right\} dx &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ 4 \sin^2 x - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \right\} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \right\} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ 3 - 2 \cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} \right\} dx \\ &= \pi \left[3x - \sin 2x - \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \pi \left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right) \\ &= \pi^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \pi^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi$$

2

(1)

$p(x)=x+\frac{1}{x}$ は $x \neq 0$ で微分可能であるから、

$$\begin{aligned} p'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

より $x \neq 0$ における $p(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$p'(x)$		$+$	0	$-$	$\nearrow$	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	2	$\nearrow$	(∞)

したがって、 $p(x)$ のとりうる値の範囲は

$$p(x) \leq -2, \quad 2 \leq p(x)$$

である。

$$(\text{答}) \quad x + \frac{1}{x} \leq -2, \quad 2 \leq x + \frac{1}{x}$$

(2)

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x^2 + ax + 3)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} + 3\right) \\ &= 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4a\left(x + \frac{1}{x}\right) + (a^2 + 10) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} t^2 &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

だから、 $g(x)$ を $t = x + \frac{1}{x}$ および a で表すと

$$\begin{aligned} g(x) &= 3(t^2 - 2) + 4at + a^2 + 10 \\ &= 3t^2 + 4at + a^2 + 4 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = 3t^2 + 4at + a^2 + 4$$

(3)

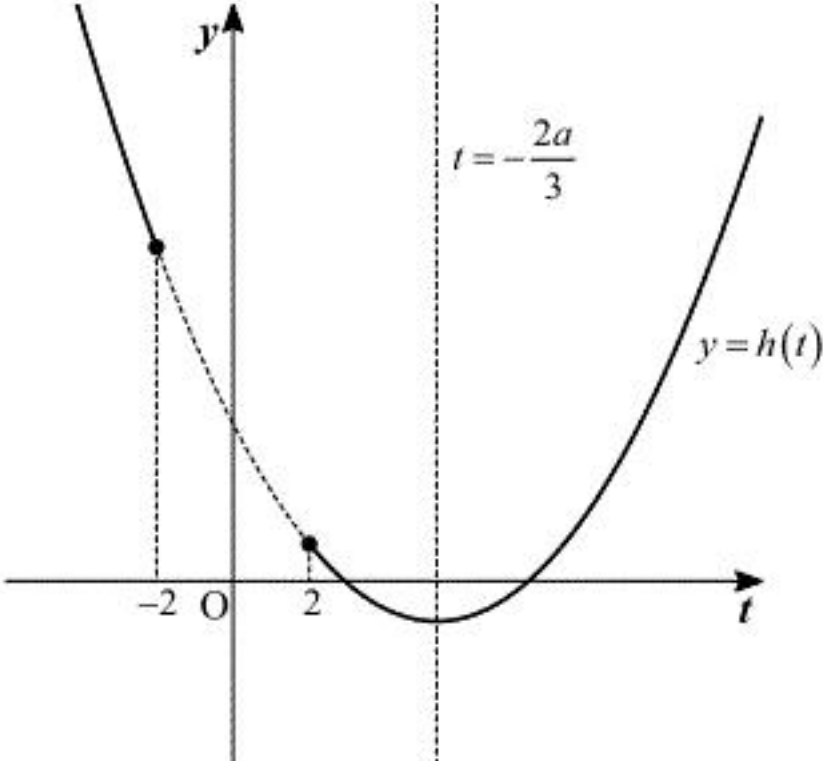
$h(t) = 3t^2 + 4at + a^2 + 4$ ($t \leq -2, 2 \leq t$) とおくと、 $g(x)$ の最小値は $h(t)$ の最小値に等しい。このとき、

$$\begin{aligned} h(t) &= 3t^2 + 4at + a^2 + 4 \\ &= 3\left(t + \frac{2a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} + 4 \end{aligned}$$

の最小値は a の値により場合分けできる。

$$[1] \quad -\frac{2a}{3} \leq -2, \quad 2 \leq -\frac{2a}{3} \Leftrightarrow a \leq -3, \quad 3 \leq a \text{ のとき}$$

$y = h(t)$ のグラフは以下のようになる。



$h(t)$ は $t = -\frac{2a}{3}$ のとき最小値

$$h\left(-\frac{2a}{3}\right) = -\frac{a^2}{3} + 4$$

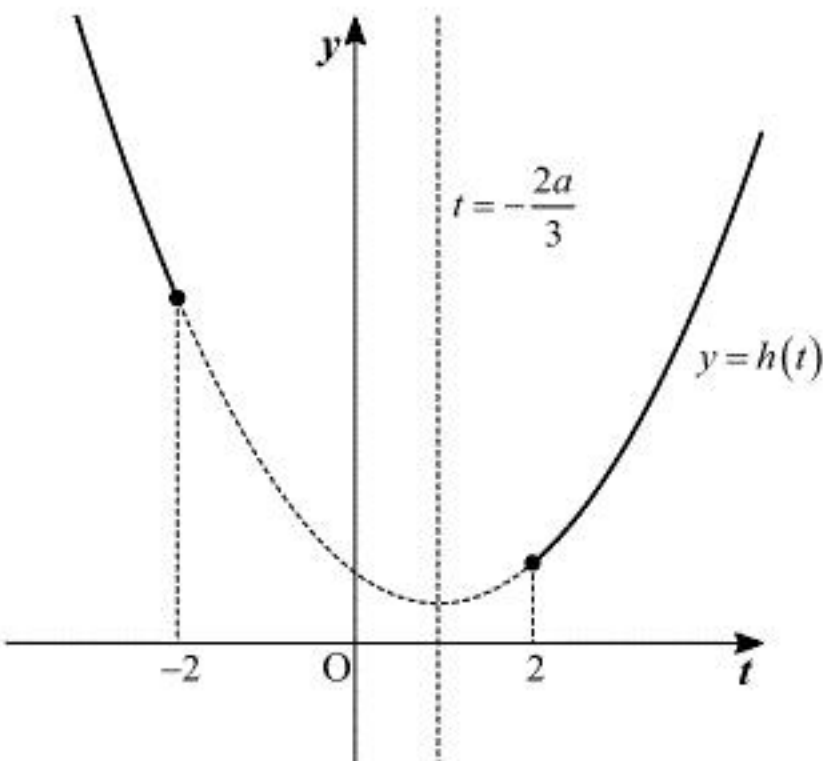
をとるので、 $g(x)$ の最小値が負となる a の値の範囲は

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{3} + 4 &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &> 12 \\ \Leftrightarrow a &< -2\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3} < a \end{aligned}$$

である。これは $a \leq -3, 3 \leq a$ を満たす。

$$[2] \quad 0 < -\frac{2a}{3} < 2 \Leftrightarrow -3 < a < 0 \text{ のとき}$$

$y = h(t)$ のグラフは以下のようになる。



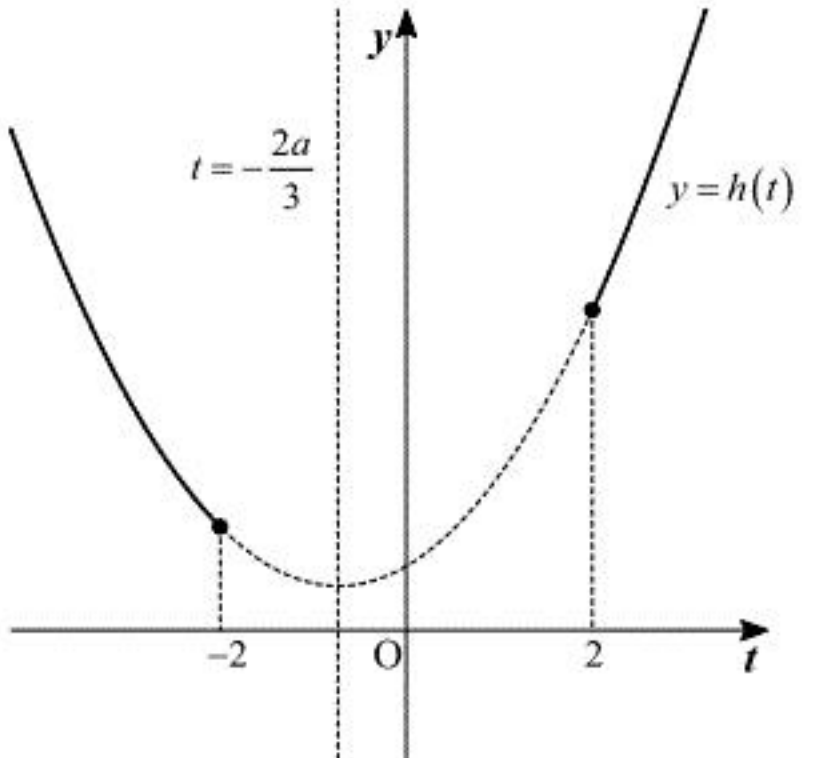
$h(t)$ は $t = 2$ のとき最小値

$$\begin{aligned} h(2) &= a^2 + 8a + 16 \\ &= (a + 4)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

をとるので、 $-3 < a < 0$ のとき $g(x)$ の最小値が負となる a の値は存在しない。

$$[3] \quad -2 < -\frac{2a}{3} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a < 3 \text{ のとき}$$

$y = h(t)$ のグラフは以下のようになる。



$h(t)$ は $t = -2$ のとき最小値

$$\begin{aligned} h(-2) &= a^2 - 8a + 16 \\ &= (a - 4)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

をとるので、 $0 \leq a < 3$ のとき $g(x)$ の最小値が負となる a の値は存在しない。

以上、[1], [2], [3] より、 $g(x)$ ($x \neq 0$) の最小値が負となるような a の値の範囲は

$$a < -2\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3} < a$$

である。

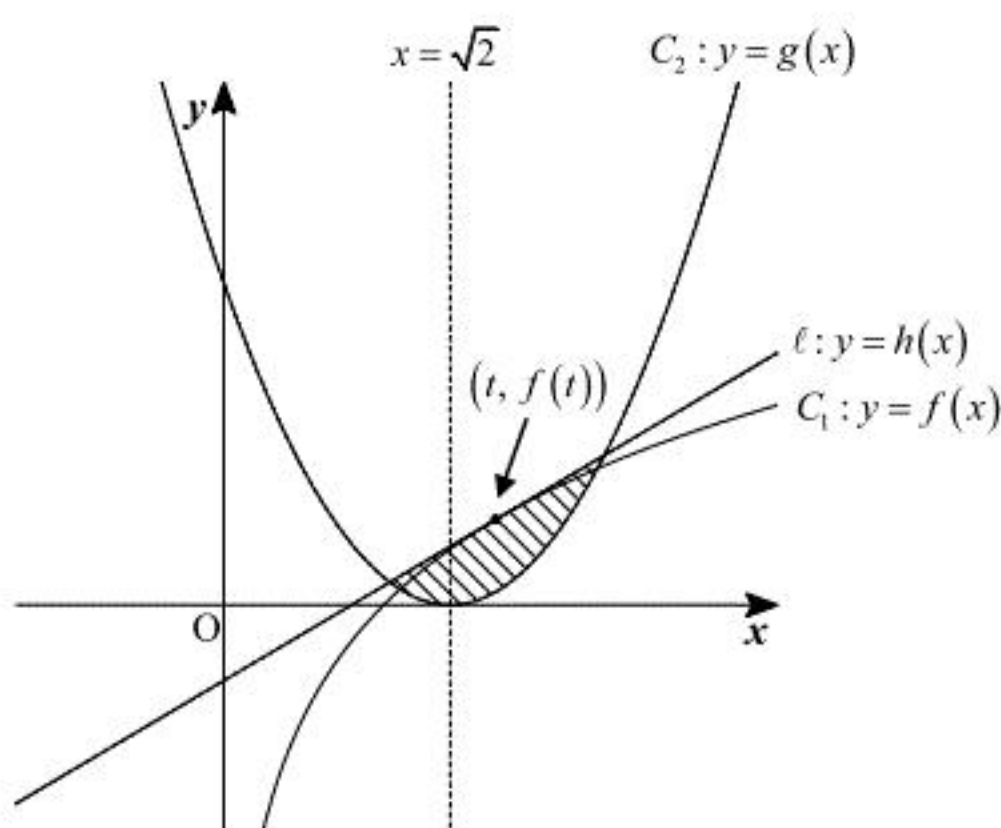
$$(\text{答}) \quad a < -2\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3} < a$$

(1)

曲線 C_1, C_2, ℓ を表す式について、関数 $f(x), g(x), h(x)$ を用いて

$$C_1: y = f(x), C_2: y = g(x), \ell: y = h(x)$$

とおく。



曲線 $C_1: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線が ℓ であるから、この直線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) \Leftrightarrow y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$$

である。ここで、関数 $i(x)$ を $i(x) = g(x) - h(x)$ とおくと、

$$i(x) = (x - \sqrt{2})^2 - \left\{ \frac{1}{t}(x-t) + \log t \right\} = x^2 - \left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right)x + 3 - \log t$$

となるから、 $i(x)$ は2次関数であり、 $y = i(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。さて、曲線 C_1 は上に凸であることから、接線 ℓ との位置関係について、

任意の実数 x で $f(x) \leq h(x)$ が成り立つ

ことがわかる。そこで、 $x = \sqrt{2}$ のときを考えると、 $f(\sqrt{2}) = \log \sqrt{2}$ 、 $g(\sqrt{2}) = 0$ であることから

$$g(\sqrt{2}) < f(\sqrt{2}) \leq h(\sqrt{2})$$

$$\therefore i(\sqrt{2}) = (g(\sqrt{2}) - h(\sqrt{2})) < 0$$

であることがわかる。したがって、下に凸の放物線 $y = i(x)$ の頂点の y 座標は負であるから、2次方程式 $i(x) = 0$ は異なる2つの実数解を持つ。そして、2次方程式 $i(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ とおき、異なる2つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと

$$D(t) = \left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right)^2 - 4(3 - \log t) = 4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4$$

$$\alpha = \frac{-\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right) - \sqrt{D(t)}}{2}, \beta = \frac{-\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{t} \right) + \sqrt{D(t)}}{2}$$

となる。最後に、直線 ℓ と曲線 C_2 で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{h(x) - g(x)\} dx = -\int_{\alpha}^{\beta} i(x) dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{D(t)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore S = \frac{1}{6} \left(4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4 \right)^{\frac{3}{2}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{6} \left(4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4 \right)^{\frac{3}{2}}$$

(2)

(1)における考察より、 $S = \{D(t)\}^{\frac{3}{2}}$ と表せるから、 S を最小にする t の値と $D(t)$ を最小にする t の値は一致する。ここで、関数 $D(t)$ の導関数は

$$D'(t) = \left(4\log t + \frac{4\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t^2} - 4 \right)' = \frac{4}{t} - \frac{4\sqrt{2}}{t^2} - \frac{2}{t^3} = \frac{4\left(t - \frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\left(t - \frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)}{t^3}$$

であるから、 $D(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}+2}{2}$	...
$D'(t)$		-	0	+
$D(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

したがって、求める t の値は $t = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$