

(1)

直線 $y = g(x)$ が 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通るとき,

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

である。ここで,

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) \\ &= f(a) - f(a) \\ &= 0 \\ h(b) &= f(b) - g(b) \\ &= f(b) - f(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり, 区間 (a, b) で

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

$$h''(x) = f''(x)$$

となる。区間 (a, b) で $f''(x) < 0 \Leftrightarrow h''(x) < 0$ となることから, $h'(x)$ は単調減少関数である。また, $h(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続かつ区間 (a, b) で微分可能であることから, 平均値の定理より

$$a < c < b$$

および

$$\begin{aligned} h'(c) &= \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を満たす実数 c が存在する。したがって, 区間 $[a, b]$ における $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(c)$	$\searrow$	0

増減表より区間 (a, b) において

$$\begin{aligned} h(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow f(x) - g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &> g(x) \end{aligned}$$

であるから題意が示された。

(証明終)

(2)

n を 2 以上の自然数とすると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x \\ a &= j, b = j+1 \quad (\because j = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

とすると, 関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であり, 区間 (a, b) で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつ。また, 区間 (a, b) で

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log x)'' &= -\frac{1}{x^2} (< 0) \end{aligned}$$

であるから(1)より

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \\ &= \{\log(j+1) - \log j\}(x - j) + \log j \end{aligned}$$

としたときに区間 $(j, j+1)$ で常に

$$f(x) > g(x)$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned} \int_j^{j+1} g(x) dx &< \int_j^{j+1} f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_j^{j+1} [\{\log(j+1) - \log j\}(x - j) + \log j] dx &< \int_j^{j+1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \left[\{\log(j+1) - \log j\} \frac{x^2}{2} - \{j \log(j+1) - (j+1) \log j\} x \right]_j^{j+1} &< \int_j^{j+1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \frac{\log j + \log(j+1)}{2} &< \int_j^{j+1} \log x dx \end{aligned}$$

となり題意が示された。

(証明終)

(3)

n を 2 以上の自然数とすると, (2)の結果より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\log j + \log(j+1)}{2} &< \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-1} (\log \sqrt{j} + \log \sqrt{j+1}) &< \int_1^n \log x dx \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (\log \sqrt{j} + \log \sqrt{j+1}) &= \log \sqrt{(n-1)!} + \log \sqrt{n!} \\ &= \log \sqrt{n!(n-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= [x \log x]_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= n \log n - (n-1) \\ &= \log n^n + \log e^{-n+1} \\ &= \log n^n e^{-n+1} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \log \sqrt{n!(n-1)!} &< \log n^n e^{-n+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{n!(n-1)!} &< n^n e^{-n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

$$a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}^{\frac{1}{n}} a_n^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geq 2)$$

の両辺について、 $a_n > 0$ より底が2の対数をとると

$$\begin{aligned} \log_2 a_1^{\frac{1}{n}} + \log_2 a_2^{\frac{1}{n}} + \cdots + \log_2 a_{n-1}^{\frac{1}{n}} + \log_2 a_n^{\frac{2}{n}} &= \log_2 8 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \log_2 a_1 + \frac{1}{n} \log_2 a_2 + \cdots + \frac{1}{n} \log_2 a_{n-1} + \frac{2}{n} \log_2 a_n &= 3 \\ \Leftrightarrow b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n &= 3n \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。このとき、 b_1 は

$$\begin{aligned} b_1 &= \log_2 2\sqrt{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であり、①の左辺を S_n とおくと

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 3(n+1) - 3n \\ \Leftrightarrow (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + 2b_{n+1}) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n) &= 3 \\ \Leftrightarrow 2b_{n+1} - b_n &= 3 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 3 &= \frac{1}{2}(b_n - 3) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_n - 3 &= \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - 3) \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3 \right) + 3 \\ \Leftrightarrow b_n &= -\frac{3}{2^n} + 3 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b_n = -\frac{3}{2^n} + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2)

$c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき、

$$\begin{aligned} \log_2 c_n &= \log_2 a_1 a_2 \cdots a_n \\ &= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_{n-1} + \log_2 a_n \\ &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n \\ &= S_n - b_n \\ &= \frac{3}{2^n} + 3n - 3 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = 2^{\frac{3}{2^n} + 3n - 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

$$\text{(答)} \quad c_n = 2^{\frac{3}{2^n} + 3n - 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3)

(2)より

$$c_{11} = 2^{\frac{3}{2^{11}} + 30}$$

であるから、与えられた不等式について、常用対数をとることを考えて

$$\begin{aligned} 10^k &\leq c_{11} < 10^{k+1} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 10^k &\leq \log_{10} c_{11} < \log_{10} 10^{k+1} \\ \Leftrightarrow k &\leq \left(\frac{3}{2^{11}} + 30 \right) \log_{10} 2 < k+1 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ であることから

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2048} + 30 \right) \log_{10} 2 &= \frac{3}{2048} \cdot 0.3010 + 30 \cdot 0.3010 \\ &= \frac{0.903}{2048} + 9.03 \end{aligned}$$

$$\therefore 9 < \left(\frac{3}{2^{11}} + 30 \right) \log_{10} 2 < 10$$

となるため、②を満たす整数 k は

$$k = 9$$

であることがわかる。

$$\text{(答)} \quad k = 9$$

(1)

題意の操作を3回行ったときの x_n ($n=1, 2, 3$) は

$$(\text{表}, \text{表}, \text{表}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 4)$$

$$(\text{表}, \text{表}, \text{裏}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 4)$$

$$(\text{表}, \text{裏}, \text{表}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$$

$$(\text{表}, \text{裏}, \text{裏}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0)$$

$$(\text{裏}, \text{表}, \text{表}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 3)$$

$$(\text{裏}, \text{表}, \text{裏}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 0)$$

$$(\text{裏}, \text{裏}, \text{表}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (-1, -2, -2)$$

$$(\text{裏}, \text{裏}, \text{裏}) \cdots (x_1, x_2, x_3) = (-1, -2, -2)$$

であるから、 $x_1 \neq 0$ かつ $x_2 \neq 0$ かつ $x_3 \neq 0$ となる確率は、 $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ または $x_3 = 0$ となることの余事象の確率と考えて

$$1 - 2p(1-p)^2 = -2p^3 + 4p^2 - 2p + 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad -2p^3 + 4p^2 - 2p + 1$$

(2)

(1)より、 n 回操作を行って $x_n = 0$ のとき操作をさらに3回行うと

$$2p(1-p)^2 \text{ の確率で } x_{n+3} = 0$$

$$1 - 2p(1-p)^2 \text{ の確率で } x_{n+3} = -2, 3, 4$$

となる。点 A が $-1, 0, 1, 2$ 以外にあるとき、以降の操作で点 A の座標が変化することはないため、 $x_3 = 0$ または $x_3 = -2, 3, 4$ であることより

$$x_{3k} = 0 \text{ または } x_{3k} = -2, 3, 4$$

であり、 $x_{3k} = 0$ となる確率は

$$\left\{ 2p(1-p)^2 \right\}^k = 2^k p^k (1-p)^{2k}$$

である。 $x_{3k} = 0$ のとき(1)より $x_{3k+1} = 0$, $x_{3k+2} = 0$ となることはなく、 $x_{3k} = -2, 3, 4$ のとき点 A の座標は変化しないので、 $x_{3k+1} = 0$, $x_{3k+2} = 0$ となることはない。すなわち、 $x_{3k+1} = 0$, $x_{3k+2} = 0$ となる確率はいずれも 0 である。

$$(\text{答}) \quad x_{3k} = 0 \text{ となる確率: } 2^k p^k (1-p)^{2k}$$

$$x_{3k+1} = 0 \text{ となる確率: } 0$$

$$x_{3k+2} = 0 \text{ となる確率: } 0$$

(3)

$x_0 = 0$ と定めると、(2)より

$$x_{3k-3} = 0 \text{ または } x_{3k-3} = -2, 3, 4$$

であり、 $x_{3k-3} = 0$ となる確率は $k=1$ の場合も含め $2^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{2k-2}$ である。 $x_{3k-3} = -2, 3, 4$ のとき

$$x_{3k-3} = x_{3k-2} = x_{3k-1} = x_{3k} = \cdots$$

であるので、 $x_{3k-3} = 0$ の場合を考えればよい。(1)より $x_{3k-2} \neq x_{3k-1}$ かつ $x_{3k-1} = x_{3k}$ となるのは

$$(x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}) = (2, 4, 4), (-1, -2, -2)$$

のときであるから、求める確率は

$$2^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{2k-2} \cdot \left\{ p^2 + (1-p)^2 \right\} = 2^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{2k-2} (2p^2 - 2p + 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{2k-2} (2p^2 - 2p + 1)$$