

(1)

与えられた方程式は

$$\begin{aligned} mx^2 - my^2 + (1 - m^2)xy + 5(1 + m^2)y - 25m &= 0 \\ \Leftrightarrow mx^2 + (y - m^2y)x - my^2 + 5(1 + m^2)y - 25m &= 0 \\ \Leftrightarrow mx^2 + (y - m^2y)x - (my - 5)(y - 5m) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{mx + (y - 5m)\}\{x - (my - 5)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow mx + y - 5m = 0, x - my + 5 = 0 \end{aligned}$$

と変形できるため、与えられた方程式の表す図形は2直線

$$\begin{aligned} mx + y - 5m &= 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x - my + 5 &= 0 & \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

直線①は

$$\begin{aligned} mx + y - 5m &= 0 \\ \Leftrightarrow m(x - 5) + y &= 0 \end{aligned}$$

より、 m の値にかかわらず定点 $(5, 0)$ を通る。また、直線②は

$$\begin{aligned} x - my + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 5) - my &= 0 \end{aligned}$$

より、 m の値にかかわらず定点 $(-5, 0)$ を通る。

(答) $(5, 0), (-5, 0)$

(3)

直線①はベクトル $\vec{n_1} = (m, 1)$ に垂直であり、直線②はベクトル $\vec{n_2} = (1, -m)$ に垂直であるため、

$$\begin{aligned} \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} &= (m, 1) \cdot (1, -m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より直線①と直線②は垂直である。したがって、(2)で求めた定点を $A(-5, 0)$ 、 $B(5, 0)$ として2直線の交点をPとすると、点Pが点A、Bに一致しないとき

$$\angle APB = 90^\circ$$

となることから、点AまたはBに一致する場合も含め、点Pは線分ABを直径とする円周上を動く。この円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \cdots \textcircled{3}$$

であるから、 m が $-1 \leq m \leq 3$ の範囲を動くときのPの軌跡は、直線①の傾き $-m$ が

$$\begin{aligned} -1 &\leq m \leq 3 \\ \Leftrightarrow -3 &\leq -m \leq 1 \end{aligned}$$

の間で変化したときの直線①と円③のBを除く交点の軌跡に等しい。 $m = -1$ のとき直線①は

$$y = x - 5$$

であるから、このときPの x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + (x - 5)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 10x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x(x - 5) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \quad (\because x \neq 5) \end{aligned}$$

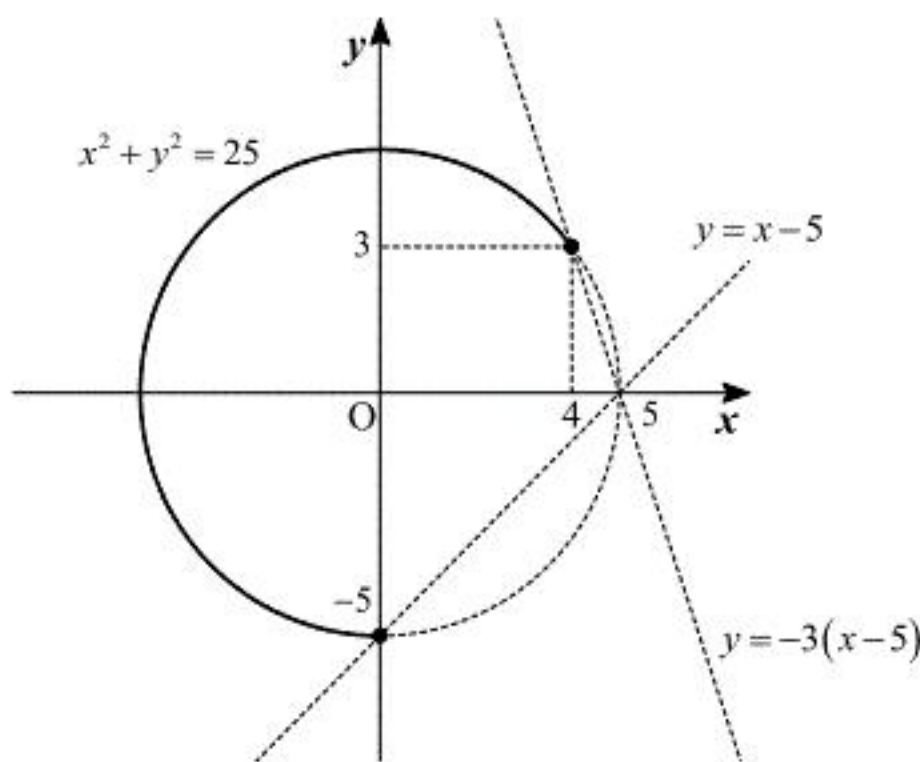
であり、 $P(0, -5)$ である。また、 $m = 3$ のとき直線①は

$$y = -3(x - 5)$$

であるから、このときPの x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + \{-3(x - 5)\}^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow x^2 + 9(x^2 - 10x + 25) &= 25 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 90x + 200 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10(x - 4)(x - 5) &= 0 \\ \therefore x &= 4 \quad (\because x \neq 5) \end{aligned}$$

であり、 $P(4, 3)$ である。したがって、直線①と直線②の軌跡は下図の通りである。



(答) 前図

(3)[別解]

交点の座標を $P(X, Y)$ とおくと、①、②より

$$X = \frac{5(m^2 - 1)}{m^2 + 1}, Y = \frac{10m}{m^2 + 1}$$

と計算できる。これより

$$X^2 + Y^2 = \frac{25(m^2 - 1)^2}{(m^2 + 1)^2} + \frac{100m^2}{(m^2 + 1)^2} = 25 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となるので交点は③の円上にある。 m が $-1 \leq m \leq 3$ の範囲を動くときのPの軌跡は、直線①の傾き $-m$ が

$$\begin{aligned} -1 &\leq m \leq 3 \\ \Leftrightarrow -3 &\leq -m \leq 1 \end{aligned}$$

の間で変化したときの直線①と円③のBを除く交点の軌跡に等しい。 $m = -1$ のとき直線①は

$$y = x - 5$$

であるから、このときPの x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + (x - 5)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 10x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x(x - 5) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \quad (\because x \neq 5) \end{aligned}$$

であり、 $P(0, -5)$ である。また、 $m = 3$ のとき直線①は

$$y = -3(x - 5)$$

であるから、このときPの x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + \{-3(x - 5)\}^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow x^2 + 9(x^2 - 10x + 25) &= 25 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 90x + 200 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10(x - 4)(x - 5) &= 0 \\ \therefore x &= 4 \quad (\because x \neq 5) \end{aligned}$$

であり、 $P(4, 3)$ である。したがって、直線①と直線②の軌跡は前図の通りである。

(答) 前図

(1)

三角関数の合成より

$$\begin{aligned} t &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ であるから

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq t \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

(2)

 $f(x)$ を $\sin x$ と $\cos x$ で表すと

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 3x - \cos 3x + 3 \sin 2x \\ &= (3 \sin x - 4 \sin^3 x) - (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6 \sin x \cos x \\ &= 3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x) + 6 \sin x \cos x \end{aligned}$$

である。 $t = \sin x + \cos x$ より

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin x + \cos x)^2 \\ &= 1 + 2 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x \cos x &= \frac{t^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} t^3 &= (\sin x + \cos x)^3 \\ &= \sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) \\ &= \sin^3 x + \cos^3 x + 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \cdot t \\ \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x &= t^3 - \frac{3}{2}t(t^2 - 1) \\ &= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

である。したがって、 $f(x)$ を t の関数として表すと

$$\begin{aligned} f(x) &= 3t - 4\left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t\right) + 6 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \\ &= 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(x) = 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3$

(3)

$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) とおくと、 $f(x)$ の最小値は $g(t)$ の最小値と等しい。このとき、導関数 $g'(t)$ は

$$\begin{aligned} g'(t) &= 6t^2 + 6t - 3 \\ &= 6\left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right) \\ &= 6\left\{t - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{t - \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$-\sqrt{2} < 0 < \sqrt{2}, \quad \begin{cases} g'(-\sqrt{2}) = 9 - 6\sqrt{2} (> 0) \\ g'(0) = -3 (< 0) \\ g'(\sqrt{2}) = 9 + 6\sqrt{2} (> 0) \end{cases}$$

であることに注意すると、 $g(t)$ の $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ における増減表は以下のようになることがわかる。

t	$-\sqrt{2}$	...	$\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$	...	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
$g(t)$	$g(-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$	$g\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)$	$\nearrow$	$g(\sqrt{2})$

増減表より、 $g(t)$ の最小値は $g(-\sqrt{2})$ または $g\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ である。ここで

$$\begin{aligned} g(t) &= 2t^3 + 3t^2 - 3t - 3 \\ &= 2t\left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right) + t^2 - 2t - 3 \\ &= 2t \cdot \frac{1}{6}g'(t) + \left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right) - 3t - \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{3}tg'(t) + \frac{1}{6}g'(t) - 3t - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $g\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ は

$$\begin{aligned} g\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) &= -3\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) - \frac{5}{2} \\ &= -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} g(-\sqrt{2}) &= 2(-\sqrt{2})^3 + 3(-\sqrt{2})^2 - 3(-\sqrt{2}) - 3 \\ &= -4\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} - 3 \\ &= 3 - \sqrt{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $g(t)$ の最小値は $g\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ である。したがって、 $f(x)$ は $t = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

のとき最小値 $-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(答) $-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(1)

直線 $y = g(x)$ が 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通るとき,

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

である。ここで,

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) \\ &= f(a) - f(a) \\ &= 0 \\ h(b) &= f(b) - g(b) \\ &= f(b) - f(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり, 区間 (a, b) で

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

$$h''(x) = f''(x)$$

となる。区間 (a, b) で $f''(x) < 0 \Leftrightarrow h''(x) < 0$ となることから, $h'(x)$ は単調減少関数である。また, $h(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続かつ区間 (a, b) で微分可能であることから, 平均値の定理より

$$a < c < b$$

および

$$\begin{aligned} h'(c) &= \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を満たす実数 c が存在する。したがって, 区間 $[a, b]$ における $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(c)$	$\searrow$	0

増減表より区間 (a, b) において

$$\begin{aligned} h(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow f(x) - g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &> g(x) \end{aligned}$$

であるから題意が示された。

(証明終)

(2)

n を 2 以上の自然数とすると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x \\ a &= j, b = j + 1 \quad (\because j = 1, 2, \dots, n - 1) \end{aligned}$$

とすると, 関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であり, 区間 (a, b) で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつ。また, 区間 (a, b) で

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log x)'' &= -\frac{1}{x^2} (< 0) \end{aligned}$$

であるから(1)より

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \\ &= \{\log(j + 1) - \log j\}(x - j) + \log j \end{aligned}$$

としたときに区間 $(j, j + 1)$ で常に

$$f(x) > g(x)$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned} \int_j^{j+1} g(x) dx &< \int_j^{j+1} f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_j^{j+1} [\{\log(j + 1) - \log j\}(x - j) + \log j] dx &< \int_j^{j+1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \left[\{\log(j + 1) - \log j\} \frac{x^2}{2} - \{j \log(j + 1) - (j + 1) \log j\} x \right]_j^{j+1} &< \int_j^{j+1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \frac{\log j + \log(j + 1)}{2} &< \int_j^{j+1} \log x dx \end{aligned}$$

となり題意が示された。

(証明終)

(3)

n を 2 以上の自然数とすると, (2)の結果より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\log j + \log(j + 1)}{2} &< \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-1} (\log \sqrt{j} + \log \sqrt{j + 1}) &< \int_1^n \log x dx \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (\log \sqrt{j} + \log \sqrt{j + 1}) &= \log \sqrt{(n - 1)!} + \log \sqrt{n!} \\ &= \log \sqrt{n!(n - 1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= [x \log x]_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= n \log n - (n - 1) \\ &= \log n^n + \log e^{-n+1} \\ &= \log n^n e^{-n+1} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \log \sqrt{n!(n - 1)!} &< \log n^n e^{-n+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{n!(n - 1)!} &< n^n e^{-n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)