$\boxed{1}$

$$\sum_{n=0}^{100} 2^n = \frac{2^{101}-1}{2-1}$$
$$= 2^{101}-1$$

である。ここで，$2^{101}-1 < 2^{101}$ であり，さらに

$$2^{101}-1 = 2 \cdot 2^{100} - 1$$
$$= 2^{100} + 2^{100} - 1$$
$$> 2^{100}$$

より，$2^{100} < 2^{101}-1$ である。これらより

$$2^{100} < 2^{101}-1 < 2^{101}$$

であり，全ての辺に対して常用対数を取ると

$$\log_{10} 2^{100} < \log_{10}\left(2^{101}-1\right) < \log_{10} 2^{101}$$
$$\Leftrightarrow 100\log_{10} 2 < \log_{10}\left(2^{101}-1\right) < 101\log_{10} 2$$
$$\Leftrightarrow 30.1 < \log_{10}\left(2^{101}-1\right) < 30.401$$
$$\therefore 30 < \log_{10}\left(2^{101}-1\right) < 31$$

であるから，$10^{30} < 2^{101}-1 < 10^{31}$ となる。以上より，

$$10^{30} < \sum_{n=0}^{100} 2^n < 10^{31}$$

となり，$\sum_{n=0}^{100} 2^n$ は31桁であることが分かる。

(答) 31桁

$\boxed{2}$

(1)

$\alpha, \beta \neq 0$ のもと，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=2\\ \dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=2\\ \left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)^3-\dfrac{3}{\alpha\beta}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=2\\ \alpha\beta=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=2\alpha\beta\\ \alpha\beta=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{12}{5}\\ \alpha\beta=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

である。解と係数の関係より，

$$\begin{aligned}A&=-(\alpha+\beta)\\&=-\frac{12}{5}\\B&=\alpha\beta\\&=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

である。

(答) $(A, B)=\left(-\dfrac{12}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$

(2)

$\gamma, \delta \neq 0$ のもと，

$$\begin{cases}|\gamma-\delta|=2\\ \left|\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\delta}\right|=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|\gamma-\delta|=2\\ |\delta-\gamma|=2|\gamma\delta|\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|\gamma-\delta|=2\\ |\gamma\delta|=1\end{cases}$$

である。また，$x=\gamma, \delta$ は2次方程式 $x^2+Cx+D=0$ の2解であるので解と係数の関係より，$C=-(\gamma+\delta), D=\gamma\delta$ である。これより $|D|=1$ であり，$D=\pm1$ である。以下では，2次方程式 $x^2+Cx+D=0$ の判別式 C^2-4D の正負によって場合分けして考える。

[1] $C^2-4D \geqq 0$ であるとき

このとき，2次方程式 $x^2+Cx+D=0$ の2解である γ, δ は実数となるので

$$\begin{aligned}&|\gamma-\delta|=2\\ \Leftrightarrow&(\gamma-\delta)^2=4\\ \Leftrightarrow&(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta=4\\ \Leftrightarrow&C^2-4D=4\end{aligned}$$

が成立する。$D=1$ のとき

$$C^2=8$$
$$\therefore C=\pm2\sqrt{2}$$

となり，これは C が有理数であることに反する。また，$D=-1$ のとき，

$$C^2=0$$
$$\therefore C=0$$

となり，これは条件を満たす。

[2] $C^2-4D<0$ であるとき

$D=-1$ のとき，$C^2-4D=C^2+4>0$ となり条件を満たさない。よって，$D=1$ で考える。このとき，2次方程式 $x^2+Cx+1=0$ の2解は虚数であり，

$$\begin{aligned}&|\gamma-\delta|=2\\ \Leftrightarrow&\left|\frac{-C+\sqrt{4-C^2}i}{2}-\frac{-C-\sqrt{4-C^2}i}{2}\right|=2\\ \Leftrightarrow&\left|\sqrt{4-C^2}i\right|=2\\ \Leftrightarrow&\sqrt{4-C^2}=2\\ \Leftrightarrow&C=0\end{aligned}$$

が成立する。

以上[1], [2]より，求める答えは

$$(C, D)=(0, \pm1)$$

である。

(答) $(C, D)=(0, \pm1)$

$\boxed{3}$

(1)

C_1, C_2 の交点の座標は,

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (x-\alpha)^3 - (x-\alpha) + \beta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 - x \\ 3\alpha x^2 - 3\alpha^2 x + \alpha^3 - \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

の実数解である。これがちょうど2つとなるのは, x についての方程式 $3\alpha x^2 - 3\alpha^2 x + \alpha^3 - \alpha - \beta = 0$ が異なる2つの実数解を持つときである。$\alpha = 0$ のとき, この方程式は $\beta = 0$ となり, これが異なる2実数解を持つことはないため不適である。よって $\alpha \neq 0$ としてよく, この2次方程式の判別式を D とおくと, 2つの実数解を持つ条件は

$$D > 0$$
$$\Leftrightarrow (3\alpha^2)^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot (\alpha^3 - \alpha - \beta) > 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 - 4\alpha - 4\beta) < 0$$

となる。これは $\alpha \neq 0$ を満たす。

(答) $\alpha(\alpha^3 - 4\alpha - 4\beta) < 0$

(2)

(1)の答えより, 求める領域は

$$\alpha\{\alpha^3 - 4\alpha - 4\beta\} < 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha > 0 \text{ かつ } \alpha^3 - 4\alpha - 4\beta < 0) \text{ または } (\alpha < 0 \text{ かつ } \alpha^3 - 4\alpha - 4\beta > 0)$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > \frac{\alpha^3}{4} - \alpha\right) \text{ または } \left(\alpha < 0 \text{ かつ } \beta < \frac{\alpha^3}{4} - \alpha\right)$$

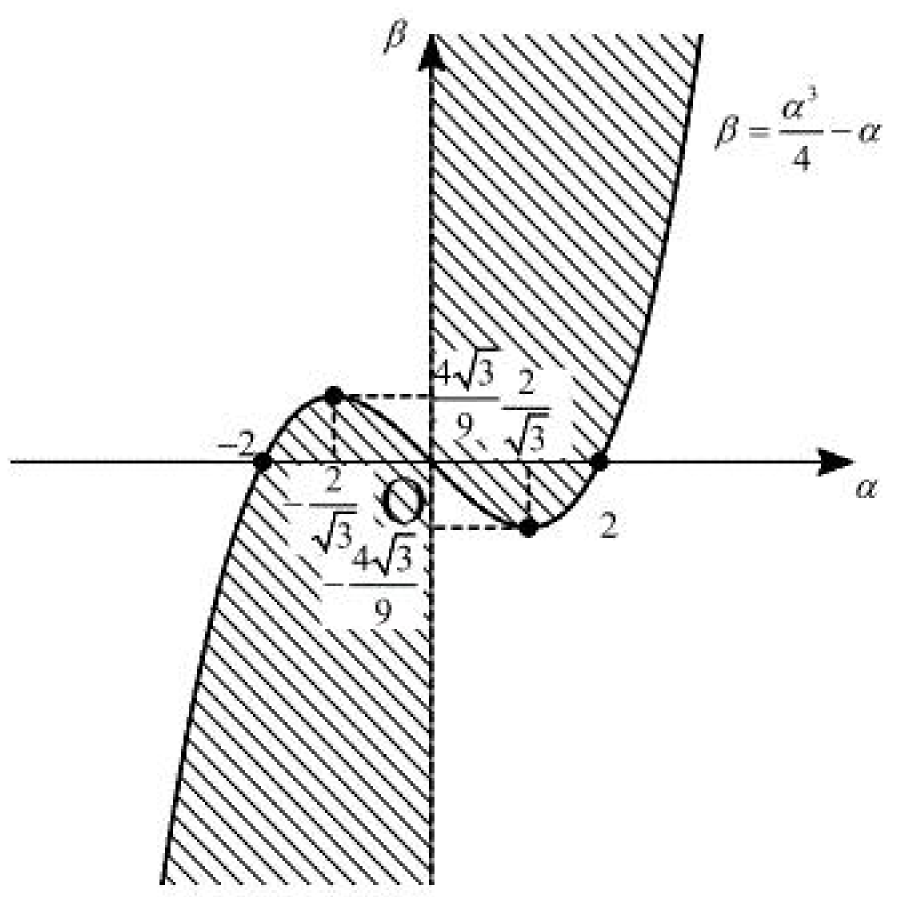
である。ここで, $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3}{4} - \alpha$ とおくと $f'(\alpha) = \dfrac{3}{4}\alpha^2 - 1$ であるから, $f(\alpha)$ の増減は下表の通りとなる。

α	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(\alpha)$	$+$	0	$-$	$(-)$	$-$	0	$+$
$f(\alpha)$	↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	(0)	↘	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↗

また,

$$f(\alpha) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha = -2, 0, 2$$

である。以上より, (1)の条件を満たす点 (α, β) が存在する領域は, 下図の通りとなる(ただし境界を含まない)。



(答) 前図(境界を含まない)