1

(1)

$u=x-t$ とおくと，$dt=-du$ であり，

t	0	$\to$	x
u	x	$\to$	0

であるので，

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\int_0^x f(x-t)g(t)dt\\&=\int_x^0 f(u)g(x-u)(-du)\\&=\int_0^x g(x-u)f(u)du\\&=\int_0^x g(x-t)f(t)dt \quad (\because u\text{ を }t\text{ に置き換えた})\\&=(g*f)(x)\end{aligned}$$

であると分かる。

(証明終)

(2)(a)

(1)より，

$$\begin{aligned}f_n(x)&=(f_{n-1}*g)(x)\\&=(g*f_{n-1})(x)\\&=\int_0^x e^{-(x-t)}f_{n-1}(t)dt\\&=e^{-x}\int_0^x e^t f_{n-1}(t)dt \qquad ・・・①\end{aligned}$$

である。この式を辺々 x で微分すると，

$$\begin{aligned}f_n{}'(x)&=-e^{-x}\int_0^x e^t f_{n-1}(t)dt+e^{-x}\left\{e^x f_{n-1}(x)\right\}\\&=-e^{-x}\int_0^x e^t f_{n-1}(t)dt+f_{n-1}(x)\end{aligned}$$

が得られ，①を代入して

$$f_n{}'(x)=-f_n(x)+f_{n-1}(x)$$

となる。

(答) $f_n{}'(x)=-f_n(x)+f_{n-1}(x)$

(b)

(a)より，$h_n(x)=e^x f_n'(x)$ を微分して

$$\begin{aligned}h_n'(x)&=e^x f_n'(x)+e^x f_n''(x)\\&e^x\left\{f_n'(x)+f_n''(x)\right\}\\&=e^x\left\{f_n'(x)-f_n{}'(x)+f_{n-1}{}'(x)\right\}\\&=e^x f_{n-1}'(x)\\&=h_{n-1}(x)\end{aligned}$$

である。

(答) $h_n'(x)=h_{n-1}(x)$

(c)

まず，2 以上の整数 n について $h_n(0)=0$ が成立することを示す。$n\geqq 3$ のとき，

$$\begin{aligned}f_n{}'(0)&=-f_n(0)+f_{n-1}(0)\\&=-\int_0^0 f_{n-1}(0-t)g(t)dt+\int_0^0 f_{n-2}(0-t)g(t)dt\\&=0\end{aligned}$$

である。また，

$$\begin{aligned}f_2{}'(0)&=-f_2(0)+f_1(0)\\&=0+1-e^0\\&=0\end{aligned}$$

である。以上より，2 以上の整数 n について，$f_n{}'(0)=0$ である。これより，2 以上の整数 n について，

$$\begin{aligned}h_n(0)&=e^0\cdot f_n'(0)\\&=0\end{aligned}$$

である。ここで積分定数を C として

$$\begin{aligned}h_1(x)&=e^x f_1'(x)\\&=e^x\cdot\left\{-\left(-e^{-x}\right)\right\}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_2(x)&=e^x f_2{}'(x)\\&=e^x\left\{-f_2(x)+f_1(x)\right\}\\&=e^x\left\{-\int_0^x f_1(t)g(x-t)dt+\left(1-e^{-x}\right)\right\}\\&=e^x\left\{-\int_0^x\left(1-e^{-t}\right)e^{-x+t}dt+\left(1-e^{-x}\right)\right\}\\&=e^x\left\{-e^{-x}\int_0^x\left(e^t-1\right)dt+\left(1-e^{-x}\right)\right\}\\&=e^x\left\{-e^{-x}\left[e^t-t\right]_0^x+\left(1-e^{-x}\right)\right\}\\&=e^x\left\{-e^{-x}\left(e^x-x-1\right)+\left(1-e^{-x}\right)\right\}\\&=x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_3(x)&=\int h_2(x)dx\\&=\int xdx\\&=\frac{1}{2}x^2+C\end{aligned}$$

より，$h_n(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ であると推測される。よって，$h_n(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ であることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}h_1(x)&=e^x f_1'(x)\\&=e^x\cdot\left\{-\left(-e^{-x}\right)\right\}\\&=1\end{aligned}$$

より，確かに成立する。

[2] $n=k$ で成立すると仮定したとき

すなわち，$h_k(x)=\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ が成立すると仮定する。このとき，$h_{k+1}'(x)=h_k(x)$ が成立することから，

$$\begin{aligned}h_{k+1}(x)&=\int h_k(x)dx\\&=\int\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}dx\\&=\frac{x^k}{k!}+C\end{aligned}$$

である(C を積分定数とする)。ここで，

$$\begin{aligned}&h_{k+1}(0)=0\\&\Leftrightarrow C=0\end{aligned}$$

である。これより，

$$h_{k+1}(x)=\frac{x^k}{k!}$$

である。

以上[1], [2]より，任意の正の整数 n について，$h_n(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ であることが数学的帰納法により示された。

(答) $h_n(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$\boxed{2}$

(1)

背理法により示す。$\sqrt{p}$ が有理数であると仮定する。このとき，$\sqrt{p}=\dfrac{a}{b}$ (a, b は互いに素な自然数)と表すことが出来る。このとき，

$$\sqrt{p}=\frac{a}{b}$$
$$\Leftrightarrow a=b\sqrt{p}$$

より，両辺を 2 乗して

$$a^2=pb^2$$

が成立する。このとき，右辺は p の倍数であるから，左辺も p の倍数である。ここで，p は素数であるから，左辺が p の倍数となるのは，a が p の倍数のときのみである。これより，ある正の整数 k を用いて，$a=kp$ と表せる。このとき，

$$k^2p^2=pb^2$$
$$\Leftrightarrow b^2=k^2p$$

が成立する。同様に考えると，b も p の倍数であることが分かる。これは，a と b が互いに素であることに反する。以上より，$\sqrt{p}$ は無理数である。

(証明終)

(2)

$$k+m\sqrt{p}+n\sqrt{q}=0$$
$$\Leftrightarrow m\sqrt{p}=-k-n\sqrt{q}$$

である。上式を辺々 2 乗すると，

$$m^2p=k^2+n^2q+2kn\sqrt{q}$$
$$\Leftrightarrow 2kn\sqrt{q}=m^2p-k^2-n^2q$$

が得られる。上式の右辺は有理数である。(1)より $\sqrt{q}$ は無理数であるから，上式が成立する為には，k, n のいずれかが 0 であることが必要である。同様に，

$$n\sqrt{q}=-k-m\sqrt{p}$$

から

$$2km\sqrt{p}=n^2q-k^2-m^2p$$

が得られ，k, m のいずれかが 0 であることが必要であることが分かる。ここで，$k\neq 0$ であると仮定すると，$n=m=0$ であるが，これは

$$k=-m\sqrt{p}-n\sqrt{q}$$
$$=0$$

に矛盾する。これより，$k=0$ である。このとき，$m\sqrt{p}+n\sqrt{q}=0 \Leftrightarrow m\sqrt{p}=-n\sqrt{q}$ を辺々 2 乗すると，

$$m^2p=n^2q$$

が得られる。ここで，p は q を素因数に持たないから，$n\neq 0$ であると仮定すると，上式において左辺を素因数分解したときの q の指数は偶数となり，一方で右辺を素因数分解したときの q の指数は奇数となるため，矛盾する。以上より，$n=0$ である。このとき，

$$m^2p=0$$
$$\therefore m=0 \ (\because p\neq 0)$$

である。

(証明終)

$\boxed{3}$

$$\sum_{n=0}^{100} 3^n = \frac{3^{101}-1}{3-1} = \frac{3^{101}-1}{2}$$

である。ここで,

$$\frac{3^{101}-1}{2} > \frac{3^{101}-3^{100}}{2} = 3^{100}$$

$$\frac{3^{101}-1}{2} < \frac{3}{2}\cdot 3^{100} < \sqrt{3}\cdot 3^{100} = 3^{100.5}$$

であるので,

$$3^{100} < \frac{3^{101}-1}{2} < 3^{100.5}$$

が成立する。それぞれの辺の常用対数をとって,

$$\log_{10} 3^{100} < \log_{10}\frac{3^{101}-1}{2} < \log_{10} 3^{100.5}$$

$$\Leftrightarrow 100\log_{10} 3 < \log_{10}\frac{3^{101}-1}{2} < 100.5\log_{10} 3$$

$$\Leftrightarrow 47.71 < \log_{10}\frac{3^{101}-1}{2} < 47.94855$$

$$\therefore 47 < \log_{10}\frac{3^{101}-1}{2} < 48$$

であるから, $10^{47} < \dfrac{3^{101}-1}{2} < 10^{48}$ となる。以上より,

$$10^{47} < \sum_{n=0}^{100} 3^n < 10^{48}$$

となり, $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} 3^n$ は48桁であることが分かる。

(答) 48桁