

(1)

まず、(ア) $\Rightarrow$ (イ)を示す。仮定より $f(0)$ は整数となり、 $f(n+1)$, $f(n)$ は整数となるので $f(n+1) - f(n)$ も整数となる。次に(イ) $\Rightarrow$ (ア)を示す。 $n \geq 1$ について、

$$f(n) = \{f(n) - f(n-1)\} + \{f(n-1) - f(n-2)\} + \cdots + \{f(1) - f(0)\} + f(0)$$

と表すことが出来る。仮定より $1 \leq k \leq n$ に対し $f(k) - f(k-1)$ は整数であり、 $f(0)$ は整数であるので $n \geq 0$ において $f(n)$ は整数となる。同様に、 $n \leq -1$ について、

$$f(n) = \{f(n) - f(n+1)\} + \{f(n+1) - f(n+2)\} + \cdots + \{f(-1) - f(0)\} + f(0)$$

と表すことができる。仮定より $1 \leq k \leq n$ に対し $f(k+1) - f(k)$ は整数であるから、 $f(k) - f(k+1)$ も整数となり、 $f(0)$ は整数であるので $n \leq 0$ において $f(n)$ は整数となる。したがって、すべての整数 n について $f(n)$ は整数となると証明された。よって、(ア)と(イ)は同値である。

(証明終)

(2)

k を整数として $x = 3k$ とおく。ここで、

$$f(3k) = \frac{(3k)^2}{p} + \frac{3k}{q} = 3 \left(\frac{3k^2}{p} + \frac{k}{q} \right)$$

となるので、 $g(x) = \frac{3x^2}{p} + \frac{x}{q}$ とおくと、 $f(3k)$ が3の倍数であるためには $g(k)$ が整数となるこ

とが必要十分である。ここで(1)より、「任意の整数 k に対して $g(k)$ が整数となる」とは、

「 $g(0)$ が整数かつ任意の整数 k に対して $g(k+1) - g(k)$ が整数となる」ことと同値である。

したがって、 $g(0) = 0$ より $g(0)$ は整数であり、また

$$g(k+1) - g(k) = \frac{3(k+1)^2}{p} + \frac{k+1}{q} - \frac{3k^2}{p} - \frac{k}{q} = 3 \left(\frac{2k+1}{p} \right) + \frac{1}{q}$$

である。また、 $h(k) = g(k+1) - g(k)$ とおくと、 $h(k)$ についても(1)より、「任意の整数 k に対して $h(k)$ が整数となる」とは、「 $h(0)$ が整数かつ任意の整数 k に対して $h(k+1) - h(k)$ が整

数となる」ことと同値である。したがって、題意を満たすには、 $h(0) = \frac{3}{p} + \frac{1}{q}$ が整数かつ任意

の整数 k について $h(k+1) - h(k) = \frac{6}{p}$ が整数となることが必要十分である。ここで、 p は素数

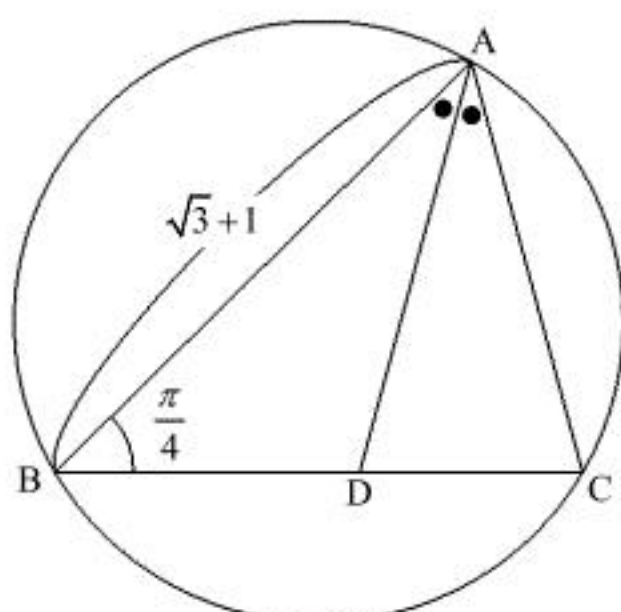
であるので、 $\frac{6}{p}$ が整数であることから、 $p = 2, 3$ が必要である。 $p = 2$ のとき、 $h(0) = \frac{3}{2} + \frac{1}{q}$ が

整数となるのは、 $q = \pm 2$ のときである。また、 $p = 3$ のとき、 $h(0) = 1 + \frac{1}{q}$ が整数となるのは、

$q = \pm 1$ のときである。以上より、 $(p, q) = (2, \pm 2), (3, \pm 1)$ となる。

(答) $(p, q) = (2, \pm 2), (3, \pm 1)$

(1)



$\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sin \angle ACB} = 2 \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

となる。よって、 $\cos^2 \angle ACB = 1 - \sin^2 \angle ACB = \frac{8-4\sqrt{3}}{16}$ となる。 $\triangle ABC$ は鋭角三角形より、

$\cos \angle ACB > 0$ となるから、

$$\cos \angle ACB = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{6+2-2\sqrt{6} \cdot 2}{4^2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

となる。

$$\text{(答)} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)

$\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow AC = 2$$

となる。また、 $BC = x$ として $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow 2^2 &= x^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \cdot x \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow (x-\sqrt{6})(x-\sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{6}, \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x = \sqrt{2}$ のとき、

$$BC^2 + AC^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 = 6 < 4 + 2\sqrt{3} = AB^2$$

より鋭角三角形とならないので不適である。また $x = \sqrt{6}$ のとき、最大辺となる AB について

$$AB^2 = 4 + 2\sqrt{3} < AC^2 + BC^2 = 10$$

となり、 $\triangle ABC$ は鋭角三角形である。また、角の二等分線の性質より

$$\begin{aligned} BD:DC &= AB:AC = (\sqrt{3}+1):2 \\ \therefore CD &= \frac{2}{(\sqrt{3}+1)+2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

(3)

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \sin \angle ACD$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} 1$$

(1)

$c = \int_{-a}^a tf(t)dt$ とおくと、 $f(x)$ は、

$$f(x) = x^2 + |b|x + c$$

と表すことができる。ゆえに、

$$\begin{aligned} c &= \int_{-a}^a t(t^2 + |b|t + c)dt \\ &= \int_{-a}^a (t^3 + |b|t^2 + ct)dt \\ &= 2 \int_0^a |b|t^2 dt \\ &= 2 \left[\frac{|b|}{3} t^3 \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3} a^3 |b| \end{aligned}$$

と導ける。よって、

$$\int_{-a}^a tf(t)dt = \frac{2}{3} a^3 |b|$$

である。

(答) $\frac{2}{3} a^3 |b|$

(2)

$f(x) = x^2 + |b|x + \frac{2}{3} a^3 |b| = 0$ の判別式を D とおくと、 $f(x) = 0$ が実数解を持つ条件は

$$D = |b|^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} a^3 |b| = |b| \left(|b| - \frac{8}{3} a^3 \right) \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立することである。以下、 b の値で場合分けして考える。

[1] $b > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow b \left(b - \frac{8}{3} a^3 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow b \geq \frac{8}{3} a^3 \end{aligned}$$

と導ける。

[2] $b = 0$ のとき

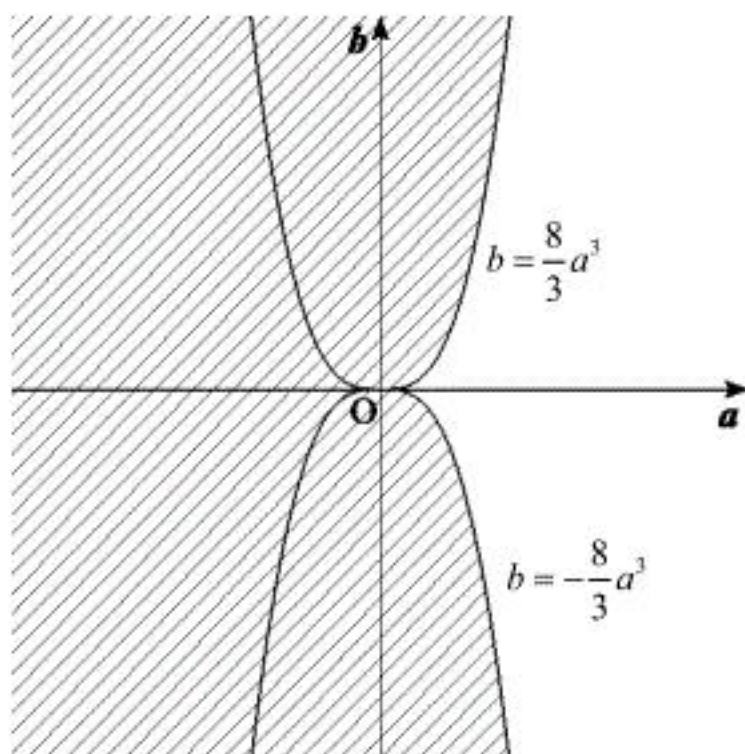
このとき①の左辺は a の値によらず 0 となり、①式は成立する。したがって、 a はすべての実数をとる。

[3] $b < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow -b \left(-b - \frac{8}{3} a^3 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow b \leq -\frac{8}{3} a^3 \end{aligned}$$

と導ける。

以上、[1], [2], [3] より、①を満たす点 (a, b) の範囲は、下の図の斜線部分と a 軸であり、境界線上を含む。



(答) 条件: $|b| \left(|b| - \frac{8}{3} a^3 \right) \geq 0$, 領域: 上図