

1

(1)

$$f'(x) = \frac{\log 2 \cdot 2^x - (-1) \cdot \log 2 \cdot 2^{-x}}{2} = \frac{\log 2}{2} (2^x + 2^{-x})$$

$$f''(x) = \frac{\log 2}{2} \{ \log 2 \cdot 2^x + (-1) \cdot \log 2 \cdot 2^{-x} \} = \frac{(\log 2)^2}{2} (2^x - 2^{-x})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{\log 2}{2} (2^x + 2^{-x}), \quad f''(x) = \frac{(\log 2)^2}{2} (2^x - 2^{-x})$$

(2)

$$y = f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \text{ とおく。このとき, } f'(x) = \frac{\log 2}{2} (2^x + 2^{-x}) > 0 \text{ より } y = f(x) \text{ は単調増加の}$$

連続関数であり, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -\infty$ より y の取りうる値は実数全体である。

また,

$$y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2y \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

と変形できる。ここで, $2^x > 0$ より $2^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$ は不適であり, 一方 $\sqrt{y^2 + 1} > |y|$ より,

$2^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ は適する。すなわち $x = \log_2 (y + \sqrt{y^2 + 1})$ となる。よって

$f^{-1}(x) = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$ となる。また, 関数 $y = f(x)$ の値域が実数全体であるから, 逆関数

$y = f^{-1}(x)$ の定義域は実数全体である。

$$(\text{答}) \quad f^{-1}(x) = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \{ f^{-1}(af(x)) - x \} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) + \sqrt{\left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) \right\}^2 + 1} \right\} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) + \sqrt{\left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) \right\}^2 + 1} \right\} - \log_2 2^x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left\{ \frac{a}{2} (1 - 2^{-2x}) + \sqrt{\frac{a^2}{4} (2^0 + 2^{-4x} - 2 \cdot 2^{-2x}) + 2^{-2x}} \right\} \\ &= \log_2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \\ &= \log_2 a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log_2 a$$

(4)

$x = -t$ とする。このとき,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ f^{-1}(af(x)) - x \} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \{ f^{-1}(af(-t)) + t \} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\log_2 \left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\} + t \right] \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} &\log_2 \left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\} \\ &= \log_2 \frac{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\} \left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) - \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\}}{-\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) - \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1}} \\ &= \log_2 \frac{-1}{-\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) - \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1}} \\ &= \log_2 \frac{1}{\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1}} \\ &= -\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって, 求める極限值は,

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\log_2 \left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\} + t \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ -\frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\} + t \right] \\ &= -\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) + \sqrt{\left\{ \frac{a}{2} (2^t - 2^{-t}) \right\}^2 + 1} \right\} - t \right] \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ f^{-1}(af(x)) - x \} \\ &= -\log_2 a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\log_2 a$$

(1)

 $x^3 - 3x = t \Leftrightarrow x^3 - 3x - t = 0$ について、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -3 & \dots \textcircled{2} \\ \alpha\beta\gamma = t & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。①より、 $\beta = -(\alpha + \gamma)$ となり、これを②に代入して

$$-\alpha(\alpha + \gamma) - (\alpha + \gamma)\gamma + \alpha\gamma = -3$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 + \alpha\gamma + \alpha^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{-\alpha \pm \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2}$$

となる。ここで、 $\gamma = \frac{-\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2}$ のとき、 $\beta = -(\alpha + \gamma) = -\frac{\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2}$ となる。このと

き、 $\beta \leq \gamma$ となり不適である。一方、 $\gamma = \frac{-\alpha - \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2}$ のとき、

$\beta = -(\alpha + \gamma) = \frac{-\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2}$ となる。このとき $\gamma \leq \beta$ となり適する。

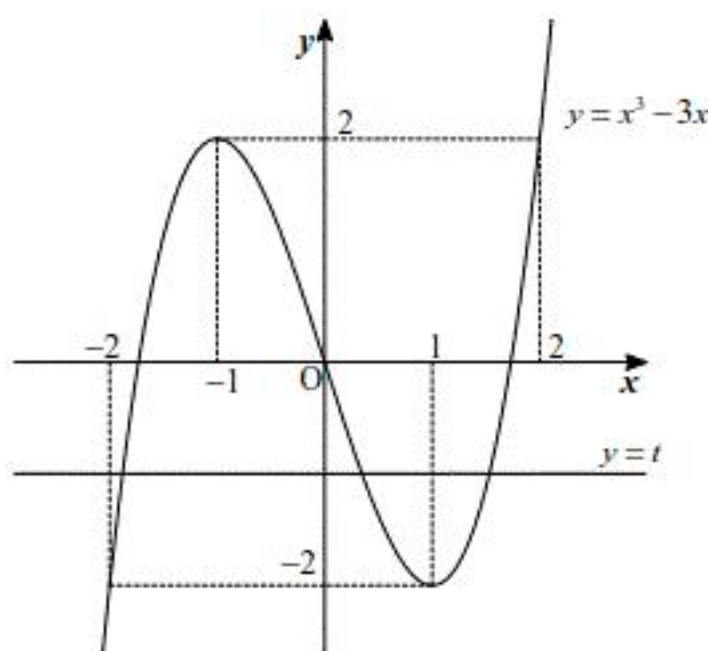
$$(\text{答}) \quad \beta = \frac{-\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2}, \gamma = \frac{-\alpha - \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2}$$

(2)

α は3次方程式 $x^3 - 3x = t$ の解であるから、 $\alpha^3 - 3\alpha = t$ である。このとき両辺を α で微分する

と、 $3\alpha^2 - 3 = \frac{dt}{d\alpha}$ である。また、3次方程式 $x^3 - 3x = -2$ の解は $x = -2, 1$ (1は重解) であり、3次

方程式 $x^3 - 3x = 2$ の解は $x = -1, 2$ (-1は重解) である。ゆえに、グラフは下の図のようになる。



ここで、 $x^3 - 3x = t$ の解 α, β, γ は、 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ を満たすことから、グラフより、 $-2 \leq t \leq 2$ において α が取る値は、下の表のようになる。

t	-2	→	2
α	1	→	2

また、(1)で求めた β, γ を代入すると、

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{-\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2} \cdot \frac{-\alpha - \sqrt{-3\alpha^2 + 12}}{2} = \frac{\alpha^2 - 3}{\alpha}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{\beta\gamma}{\alpha} dt &= \int_1^2 \frac{\alpha^2 - 3}{\alpha} \cdot \frac{dt}{d\alpha} d\alpha \\ &= \int_1^2 \frac{\alpha^2 - 3}{\alpha} \cdot (3\alpha^2 - 3) d\alpha \\ &= 3 \int_1^2 \left(\alpha^3 - 4\alpha + \frac{3}{\alpha} \right) d\alpha \\ &= 3 \left[\frac{1}{4} \alpha^4 - 2\alpha^2 + 3 \log \alpha \right]_1^2 \\ &= 9 \log 2 - \frac{27}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 9 \log 2 - \frac{27}{4}$$

3

(1)

$x > 0$ について考える。このとき $f'(x) = (x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' = \log x + 1$ となる。ゆえに、 $x = \frac{1}{e}$ で $f'(x) = 0$ となる。したがって、 $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

増減表より、 $x > 0$ における $f(x)$ の最小値は、 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ である。また、 $x \leq 0$ で $f(x) = 0$ であるから、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{e}$ で最小値 $-\frac{1}{e}$ をとる。よって、 $a = \frac{1}{e}$ 、 $f(a) = -\frac{1}{e}$ となる。

(答) $a = \frac{1}{e}$ 、 $f(a) = -\frac{1}{e}$

(2)

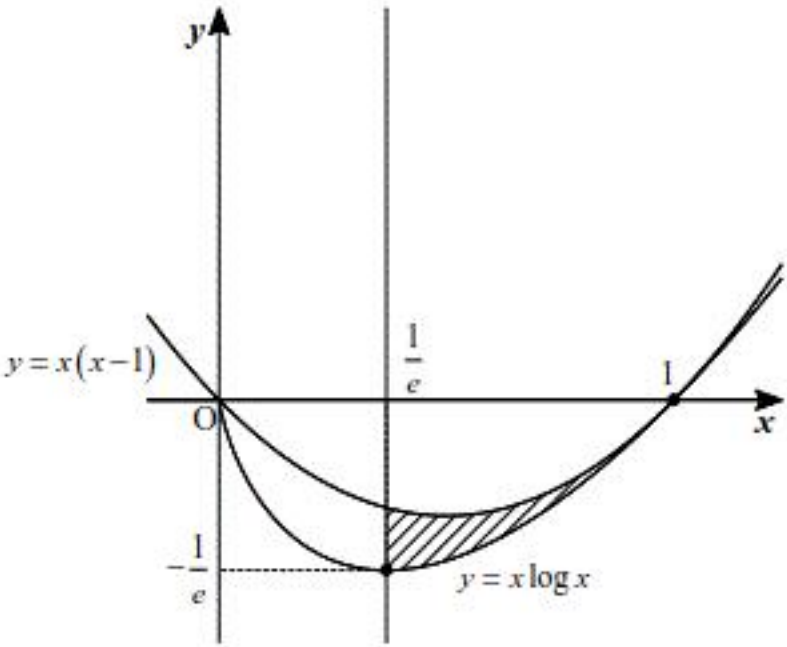
$x \leq 0$ で $f(x) - g(x) = x(x-1)$ である。 $x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1$ より $x \leq 0$ において $f(x), g(x)$ は $x = 0$ で共有点を1つもつ。また、 $x > 0$ において $f(x) - g(x) = x(\log x - x + 1)$ である。 $x \neq 0$ より $\log x - x + 1 = 0$ となる点を考える。 $h(x) = \log x - x + 1$ とおくと、 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ となる。したがって $x = 1$ で $h'(x) = 0$ となり、 $h(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	...	1	...
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

よって増減表より、 $x > 0$ では $x = 1$ のみ $f(x) - g(x) = 0$ となり、2 曲線は共有点を1つもつ。ゆえに曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点はちょうど2つである。
(証明終)

(3)

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる図形の $x \geq \frac{1}{e}$ の部分は下図の斜線部分となる。ただし境界線を含む。



よって体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ (f(x))^2 - (g(x))^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ x^2 (\log x)^2 - x^2 (x-1)^2 \right\} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 (\log x)^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 (\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{2}{3} x^2 \log x dx \\ &= -\frac{1}{3e^3} - \left[\frac{2}{9} x^3 \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{2}{9} x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3e^3} - \frac{2}{9e^3} + \left[\frac{2}{27} x^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \frac{2}{27} - \frac{17}{27e^3} \\ \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 (x-1)^2 dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \frac{1}{30} - \frac{1}{5e^5} + \frac{1}{2e^4} - \frac{1}{3e^3} \end{aligned}$$

となるので、

$$V = \pi \left(\frac{11}{270} - \frac{8}{27e^3} - \frac{1}{2e^4} + \frac{1}{5e^5} \right)$$

となる。

(答) $\pi \left(\frac{11}{270} - \frac{8}{27e^3} - \frac{1}{2e^4} + \frac{1}{5e^5} \right)$