

(1)

$x > 0$ について考える。このとき $f'(x) = (x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' = \log x + 1$ となる。ゆえに、 $x = \frac{1}{e}$ で $f'(x) = 0$ となる。したがって、 $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$	↗	-	0	+
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

また、 $x \leq 0$ で $f(x) = 0$ であるから、増減表より $f(x)$ は $x = \frac{1}{e}$ で最小値 $-\frac{1}{e}$ をとる。よって、
 $a = \frac{1}{e}$, $f(a) = -\frac{1}{e}$ となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{e}, f(a) = -\frac{1}{e}$$

(2)

$x \leq 0$ で $f(x) - g(x) = x(x-1)$ である。 $x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1$ より $x \leq 0$ において $f(x), g(x)$ は $x = 0$ で共有点を1つもつ。また、 $x > 0$ において $f(x) - g(x) = x(\log x - x + 1)$ である。 $x \neq 0$ より $\log x - x + 1 = 0$ となる点を考える。 $h(x) = \log x - x + 1$ とおくと、 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ となる。したがって $x = 1$ で $h'(x) = 0$ となり、 $h(x)$ の増減は次のようになる。

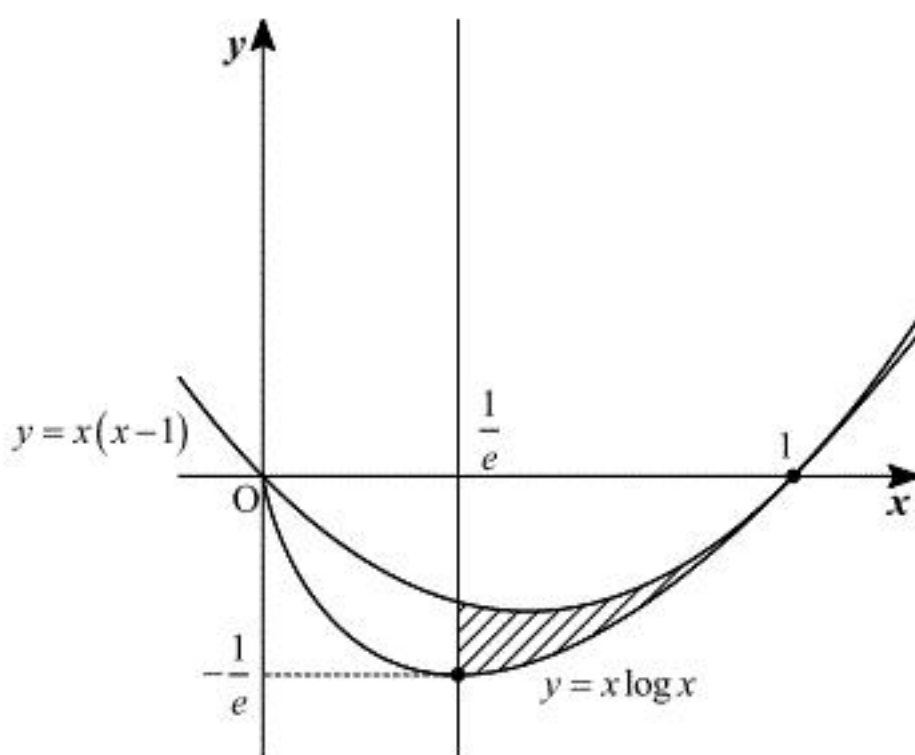
x	0	...	1	...
$h'(x)$	↗	+	0	-
$h(x)$	↗	↗	0	↘

よって増減表より、 $x > 0$ では $x = 1$ のみ $f(x) - g(x) = 0$ となり、2 曲線は共有点を1つもつ。ゆえに曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点はちょうど2つである。

(証明終)

(3)

$f(x), g(x)$ で囲まれる図形の $x \geq \frac{1}{e}$ の部分は下図の斜線部分となる。ただし境界線を含む。



よって体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ (f(x))^2 - (g(x))^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ x^2 (\log x)^2 - x^2 (x-1)^2 \right\} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 (\log x)^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 (\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{2}{3} x^2 \log x dx \\ &= -\frac{1}{3e^3} - \left[\frac{2}{9} x^3 \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{2}{9} x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3e^3} - \frac{2}{9e^3} + \left[\frac{2}{27} x^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \frac{2}{27} - \frac{17}{27e^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 (x-1)^2 dx &= \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \frac{1}{30} - \frac{1}{5e^5} + \frac{1}{2e^4} - \frac{1}{3e^3} \end{aligned}$$

となるので、

$$V = \pi \left(\frac{11}{270} - \frac{8}{27e^3} - \frac{1}{2e^4} + \frac{1}{5e^5} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi \left(\frac{11}{270} - \frac{8}{27e^3} - \frac{1}{2e^4} + \frac{1}{5e^5} \right)$$

3

(1)

$$f'(x) = \frac{\log 2 \cdot 2^x - (-1) \cdot \log 2 \cdot 2^{-x}}{2} = \frac{\log 2}{2} (2^x + 2^{-x})$$

$$f''(x) = \frac{\log 2}{2} \{ \log 2 \cdot 2^x + (-1) \cdot \log 2 \cdot 2^{-x} \} = \frac{(\log 2)^2}{2} (2^x - 2^{-x})$$

となる。

$$(答) \quad f'(x) = \frac{\log 2}{2} (2^x + 2^{-x}), \quad f''(x) = \frac{(\log 2)^2}{2} (2^x - 2^{-x})$$

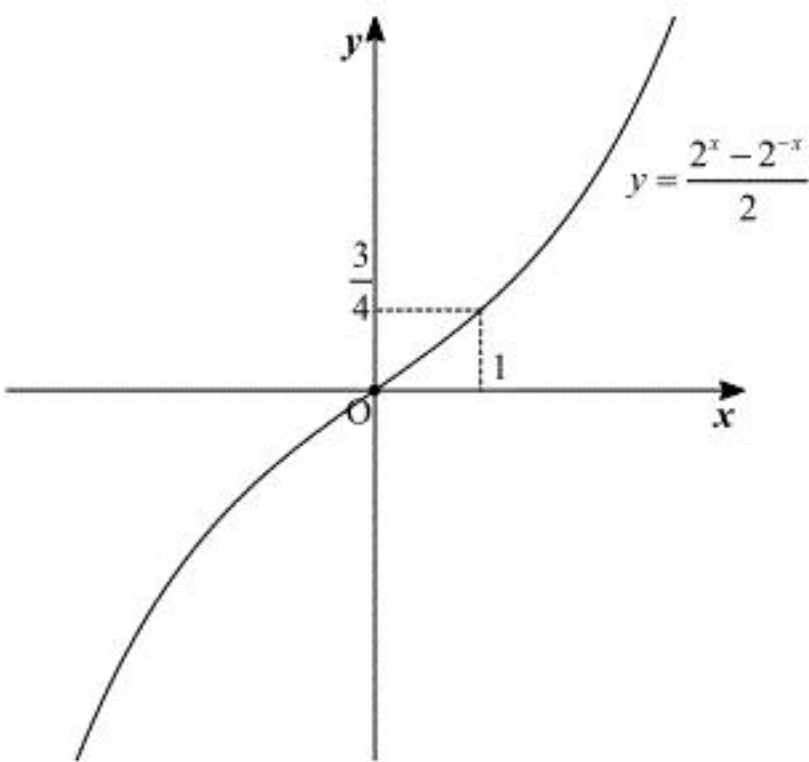
(2)

$f'(x) = \frac{\log 2}{2} (2^x + 2^{-x}) > 0$ より $f(x)$ は単調増加する。よって極値はとらない。また

$f''(x) = \frac{(\log 2)^2}{2} (2^x - 2^{-x})$ より $2^x - 2^{-x} = 0$ ，すなわち $x = 0$ のとき変曲点となる。また， $x < 0$ で $2^x < 2^{-x}$ より $f''(x) < 0$ であり， $x > 0$ で $2^x > 2^{-x}$ より $f''(x) > 0$ となる。よって $f(x)$ の増減は下の表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\log 2$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\curvearrowright$	0	$\curvearrowleft$

よってグラフは次のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)より $f(x)$ は単調増加の連続関数であり， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = +\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -\infty$ より y の値域は実数全体である。 $y = f(x)$ より

$$y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y = 2^x - 2^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2y \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

となる。いま $\sqrt{y^2 + 1} > |y|$ ， $2^x > 0$ であるから， $2^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$ は不適であり， $2^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ は適する。したがって， $2^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ である。

$$(答) \quad 2^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

(4)

$2^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ より両辺 2 を底として対数をとると， $x = \log_2 (y + \sqrt{y^2 + 1})$ となる。 x と y を入れ替えると， $y = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$ である。よって $f^{-1}(x) = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$ となる。また，関数 $y = f(x)$ の値域は実数全体であるので，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の定義域は実数全体である。

$$(答) \quad f^{-1}(x) = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(5)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{ f^{-1}(af(x)) - x \} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) + \sqrt{\left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) \right\}^2 + 1} \right\} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) + \sqrt{\left\{ \frac{a}{2} (2^x - 2^{-x}) \right\}^2 + 1} \right\} - \log_2 2^x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\log_2 \left\{ \frac{a}{2} (1 - 2^{-2x}) + \sqrt{\frac{a^2}{4} (2^0 + 2^{-4x} - 2 \cdot 2^{-2x}) + 2^{-2x}} \right\} \right] \\ &= \log_2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \\ &= \log_2 a \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \log_2 a$$