

(1)

$f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + ax$ とおくと, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $g'(x) = 2x + a$ となる。接点の x 座標を t とおくと, C_1 と C_2 がある共有点で共通の接線をもつとき,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t^3 - t = t^2 + at & \cdots \textcircled{1} \\ 3t^2 - 1 = 2t + a & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。①-②より

$$-2t^3 = -t^2 \Leftrightarrow t^2(2t-1) = 0$$

$$\therefore t = 0, \frac{1}{2}$$

となる。これを②に代入し, $(a, t) = (-1, 0), \left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$ を得る。

$a = -1$ のとき接点の x 座標は 0

(答) $a = -\frac{5}{4}$ のとき接点の x 座標は $\frac{1}{2}$

(2)

[1] $a = -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x^3 - x) - (x^2 - x) \\ &= x^3 - x^2 \\ &= x^2(x-1) \end{aligned}$$

となるから, C_1 と C_2 の共有点は $x = 0, 1$ となる。 $0 \leq x \leq 1$ で $f(x) - g(x) \leq 0$, すなわち $f(x) \leq g(x)$ であるから, このとき C_1 と C_2 で囲まれた面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\{f(x) - g(x)\} dx &= -\int_0^1 (x^3 - x^2) dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a = -\frac{5}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x^3 - x) - \left(x^2 - \frac{5}{4}x\right) \\ &= x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x \\ &= x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

となるから, C_1 と C_2 の共有点は $x = 0, \frac{1}{2}$ となる。 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ で $f(x) - g(x) \geq 0$, すなわち $f(x) \geq g(x)$ であるから, このとき C_1 と C_2 で囲まれた面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{192} \end{aligned}$$

となる。

$a = -1$ のとき $\frac{1}{12}$

(答)

$a = -\frac{5}{4}$ のとき $\frac{1}{192}$

(1)

三角形 ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{4+9-t^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{13-t^2}{12}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{13-t^2}{12}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{12}\end{aligned}$$

である。これを用いると、三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} 2 \cdot 3 \frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{12} = \frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{4}$$

となる。また、三角形 ABC に半径 r の円が内接することから、三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} (AB + BC + CA) \cdot r = \frac{1}{2} (t+5)r$$

と表すこともできる。以上から、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{4} &= \frac{1}{2} (t+5)r \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{2(t+5)}\end{aligned}$$

となる。また、球 S は三角柱 T の 2 つの底面に接するから、

$$h = 2r = \frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{t+5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{2(t+5)}, \quad h = \frac{\sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25}}{t+5}$$

(2)

(1) より T の表面積 K は、

$$\begin{aligned}K &= h(AB + BC + CA) + 2 \cdot \frac{(t+5)r}{2} \\ &= 2r(t+5) + (t+5)r \\ &= 3(t+5)r \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{-t^4 + 26t^2 - 25} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{-(t^2 - 13)^2 + 144}\end{aligned}$$

となる。 $1 < t < 5$ であるから、 $t^2 = 13$ 、つまり $t = \sqrt{13}$ のとき K は最大値

$$\frac{3}{2} \sqrt{144} = 18$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \begin{array}{ll} t \text{ の値} & t = \sqrt{13} \\ \text{最大値} & K = 18 \end{array}$$

(1)

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] \quad \dots \textcircled{1}$$

について、 $[x] = m$ (m は整数) とおく。

[1] $m \leq x < m + \frac{1}{2}$ のとき

$m + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < m + 1$ であるから、 $\left[x + \frac{1}{2} \right] = m$ となる。また、 $2m \leq 2x < 2m + 1$ であるから、 $[2x] = 2m$ となる。以上から①は成立する。

[2] $m + \frac{1}{2} \leq x < m + 1$ のとき

$m + 1 \leq x + \frac{1}{2} < m + 1 + \frac{1}{2}$ であるから、 $\left[x + \frac{1}{2} \right] = m + 1$ となる。また、 $2m + 1 \leq 2x < 2m + 2$ であるから、 $[2x] = 2m + 1$ となる。以上から①は成立する。

以上[1], [2]より、すべての実数 x について①は成り立つ。

(2)

数学的帰納法を利用して、すべての自然数 n に対して

$$2^n > n \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n = 1$ のとき

$2^1 = 2$ より②は成り立つ。

[2] $n = k$ (k は1以上の自然数) について②が成立するとき

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k$$

が成り立つ。また、

$$2k - (k+1) = k-1 \geq 0$$

$$\therefore 2k \geq k+1$$

が成り立つから、 $2^{k+1} > k+1$ となり、 $n = k+1$ のときも②が成り立つことが分かる。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して②は成り立つ。

(3)

①より

$$\left[\frac{n}{2^k} \right] + \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{n}{2^{k-1}} \right] \Leftrightarrow \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{n}{2^{k-1}} \right] - \left[\frac{n}{2^k} \right]$$

となるから、与式は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right] &= \sum_{k=1}^n \left(\left[\frac{n}{2^{k-1}} \right] - \left[\frac{n}{2^k} \right] \right) \\ &= \left(\left[\frac{n}{2^0} \right] - \left[\frac{n}{2^1} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{2^1} \right] - \left[\frac{n}{2^2} \right] \right) + \dots + \left(\left[\frac{n}{2^{n-2}} \right] - \left[\frac{n}{2^{n-1}} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{2^{n-1}} \right] - \left[\frac{n}{2^n} \right] \right) \\ &= \left[\frac{n}{2^0} \right] - \left[\frac{n}{2^n} \right] \\ &= n - \left[\frac{n}{2^n} \right] \end{aligned}$$

となる。②より $0 < \frac{n}{2^n} < 1$ であるから、 $\left[\frac{n}{2^n} \right] = 0$ である。したがって、

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = n$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = n$$