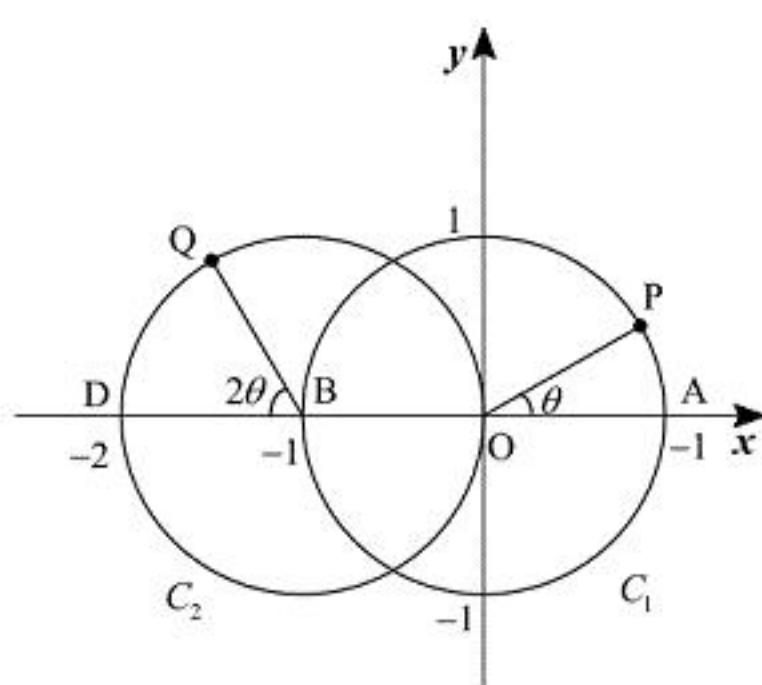


(1)



C_1, C_2 を図示すると上図のようになる。よって、 $OP(\cos \theta, \sin \theta)$ である。また、図より $\angle DBQ = 2\theta$ であるから、点 Q の座標は

$$(-1 + \cos(\pi - 2\theta), \sin(\pi - 2\theta)) = (-1 - \cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

となる。

(答) $P(\cos \theta, \sin \theta), Q(-1 - \cos 2\theta, \sin 2\theta)$

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos \theta + 1 + \cos 2\theta)^2 + (\sin \theta - \sin 2\theta)^2 \\ &= (\cos \theta + 2\cos^2 \theta)^2 + (\sin \theta - 2\sin \theta \cos \theta)^2 \\ &= (\cos \theta + 2\cos^2 \theta)^2 + (1 - \cos^2 \theta)(1 - 2\cos \theta)^2 \\ &= (t + 2t^2)^2 + (1 - t^2)(1 - 2t)^2 \\ &= 8t^3 + 4t^2 - 4t + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $PQ^2 = 8t^3 + 4t^2 - 4t + 1$

(3)

$f(t) = 8t^3 + 4t^2 - 4t + 1$ とおく。 $f(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 24t^2 + 8t - 4 \\ &= 4(6t^2 + 2t - 1) \end{aligned}$$

となる。 $f'(t) = 0$ の解は $t = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}$ である。また、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $-1 \leq t \leq 1$ であるから、 $f(t)$ の増減表は以下になる。

t	-1	...	$\frac{-1-\sqrt{7}}{6}$	...	$\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	9

また、

$$\begin{aligned} f(t) &= 8t^3 + 4t^2 - 4t + 1 \\ &= (24t^2 + 8t - 4) \cdot \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{18}\right) + \frac{1}{9}(-28t + 11) \\ &= f'(t) \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{18}\right) + \frac{1}{9}(-28t + 11) \end{aligned}$$

である。 $t = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ は $f'(t) = 0$ の解だから、上式に $t = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ を代入すると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right) &= \frac{1}{9} \left(-28 \cdot \frac{-1+\sqrt{7}}{6} + 11\right) \\ &= \frac{47-14\sqrt{7}}{27} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} f(-1) - f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right) &= 1 - \frac{47-14\sqrt{7}}{27} \\ &= \frac{2}{27}(7\sqrt{7}-10) \\ &= \frac{2}{27}(\sqrt{343}-\sqrt{100}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから、 $f(-1) > f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)$ である。したがって、増減表より PQ^2 の最小値は

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right) = \frac{47-14\sqrt{7}}{27} \text{ となる。}$$

(答) t の値 $t = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$
最小値 $\frac{47-14\sqrt{7}}{27}$

2

(1)

$g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

となる。従って、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ は収束しないから、 $g(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

(証明終)

(2)

(a)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = \infty$ であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x+2)^2} \right\} \\ &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x+2)^2} \right\} \\ &= \infty\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

(b)

(1)と同様に計算すると、 $x=1, -2$ のとき $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x+2)^2}$ は微分可能でないことが分かる。また、 $x \neq 1, -2$ のとき $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}}$$

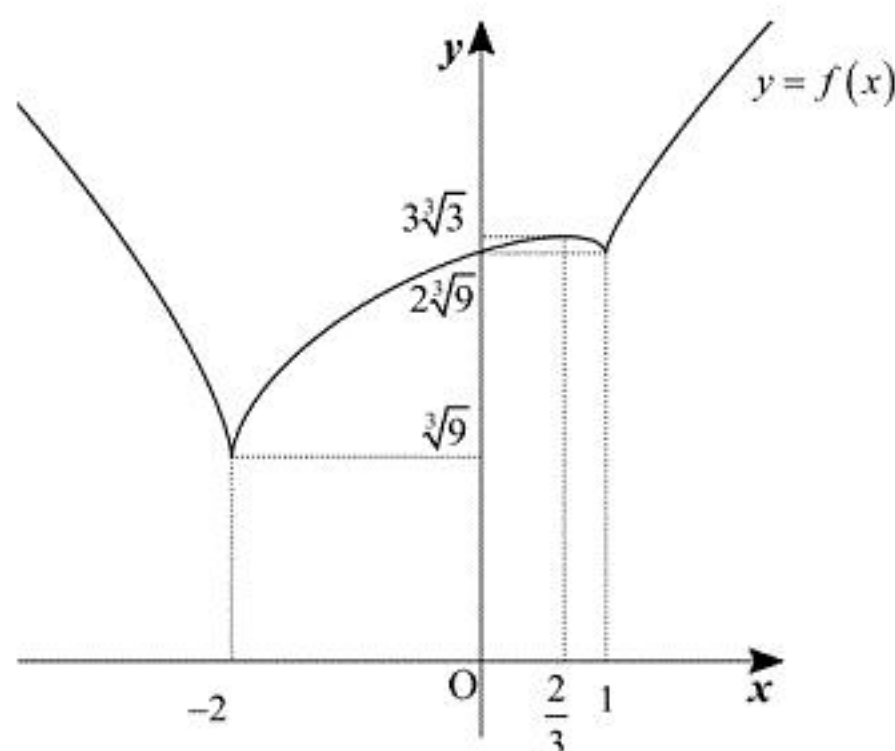
となる。したがって、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^{-\frac{1}{3}} &= -2(x+2)^{-\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow (x+2)^{\frac{1}{3}} &= -2(x-1)^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow (x+2) &= -8(x-1) \\ \therefore x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	$\frac{2}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	-		+	0	-		+
$f(x)$		$\sqrt[3]{9}$		$3\sqrt[3]{3}$		$2\sqrt[3]{9}$	

以上から、(a)の結果もふまえて $y = f(x)$ のグラフを図示すると次のようになる。



(答) 前図

(c)

(b)の結果より、 $y = f(x)$ のグラフと $y = k$ のグラフの交点が4つになるような k の範囲は

$$2\sqrt[3]{9} < k < 3\sqrt[3]{3}$$

である。したがって、 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数が4個となる k の範囲は $2\sqrt[3]{9} < k < 3\sqrt[3]{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt[3]{9} < k < 3\sqrt[3]{3}$$

3

(1)

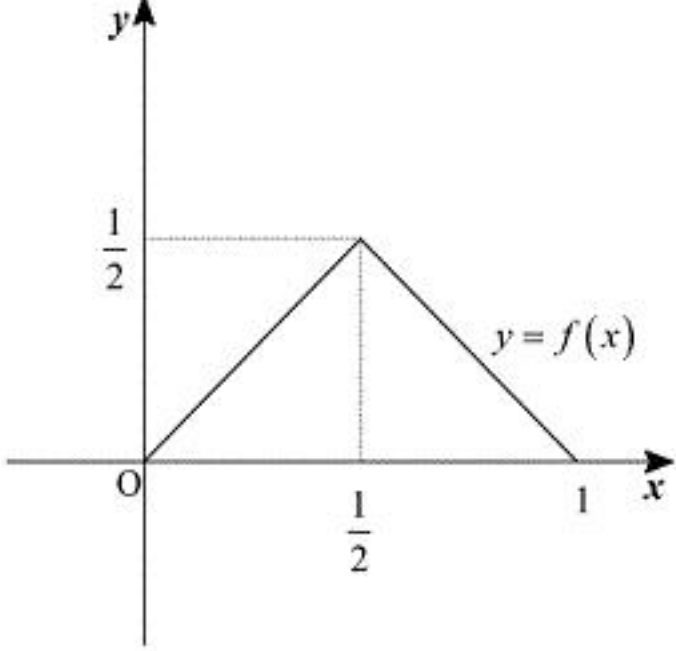
$0 \leq x < \frac{1}{2}$ のとき $\left\lceil x + \frac{1}{2} \right\rceil = 0$ であるから

$$f(x) = |x| = x$$

となる。また、 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき $\left\lceil x + \frac{1}{2} \right\rceil = 1$ であるから

$$f(x) = |x - 1| = -x + 1$$

となる。以上より、 $y = f(x)$ のグラフを図示すると次のようになる。



(答) 前図

(2)

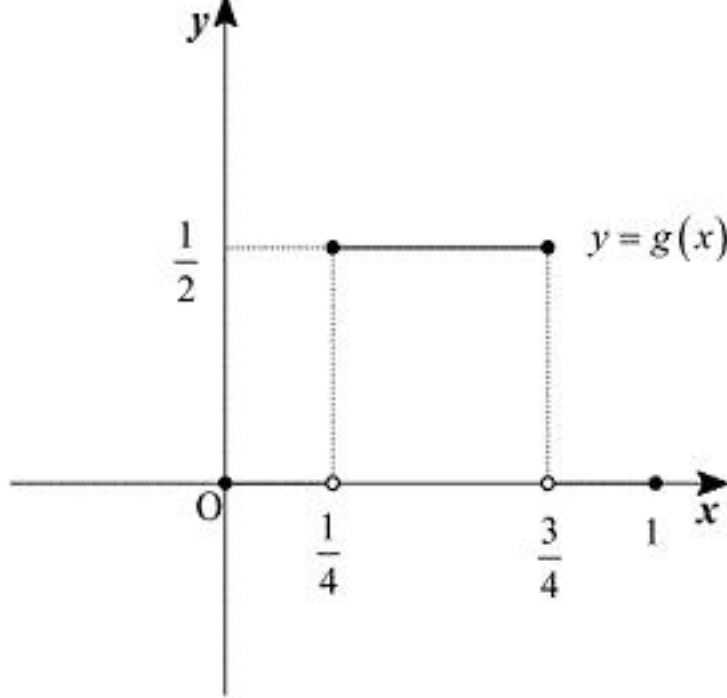
(1)の結果より、 $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ である。 $0 \leq f(x) < \frac{1}{4}$ 、つまり $0 \leq x < \frac{1}{4}$ または $\frac{3}{4} < x \leq 1$ のとき $\frac{3}{4} \leq f(x) + \frac{3}{4} < 1$ であるから、

$$g(x) = 0$$

となる。また、 $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ 、つまり $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ のとき $1 \leq f(x) + \frac{3}{4} < \frac{5}{4}$ であるから、

$$g(x) = \frac{1}{2}$$

となる。以上より、 $y = g(x)$ のグラフを図示すると次のようになる。



(答) 前図

(3)

$0 \leq x < \frac{1}{4}$ または $\frac{3}{4} < x \leq 1$ のとき $g(x) = 0$ であり、また $f(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} h(x) &= |f(x) - g(x)| + f(x) \\ &= 2f(x) \end{aligned}$$

となる。(1)の結果より、 $0 \leq x < \frac{1}{4}$ のとき

$$h(x) = 2x$$

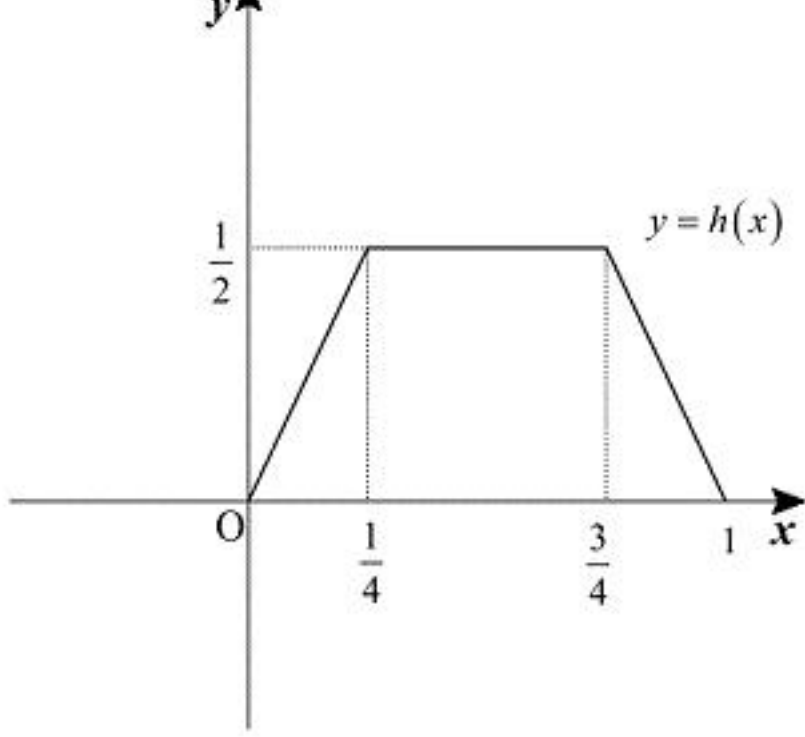
であり、 $\frac{3}{4} < x \leq 1$ のとき

$$h(x) = -2x + 2$$

である。また、 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ のとき $g(x) = \frac{1}{2}$ であり、また $f(x) \leq \frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} h(x) &= |f(x) - g(x)| + f(x) \\ &= \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| + f(x) \\ &= -f(x) + \frac{1}{2} + f(x) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $y = h(x)$ のグラフを図示すると次のようになる。



(答) 前図

(4)

(3)の結果より、 $h(x)$ 、 $\sin \pi x$ はともに $x = \frac{1}{2}$ について線対称である。したがって

$$\int_0^1 h(x) \sin \pi x dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) \sin \pi x dx$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) \sin \pi x dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) \sin \pi x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{4}} h(x) \sin \pi x dx + 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} h(x) \sin \pi x dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{4}} x \sin \pi x dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sin \pi x dx \\ &= 4 \left(\left[-\frac{1}{\pi} x \cos \pi x \right]_0^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{4}} \cos \pi x dx \right) + \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 4 \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^{\frac{1}{4}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int_0^1 h(x) \sin \pi x dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}$