

(1)

1個のさいころを2回投げたときのさいころの目の全通りは

$$6^2 = 36$$

通りであり、これらは同様に確からしい。ここで、2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもつとき

$$a^2 - 4b \geq 0 \quad \cdots \text{①}$$

となるから、 a, b はともにさいころの目であることより

[1] $b=1$ のとき

①より、 $a^2 \geq 4$ となる a は

$$a = 2, 3, 4, 5, 6$$

となる。

[2] $b=2$ のとき

①より、 $a^2 \geq 8$ となる a は

$$a = 3, 4, 5, 6$$

となる。

[3] $b=3$ のとき

①より、 $a^2 \geq 12$ となる a は

$$a = 4, 5, 6$$

となる。

[4] $b=4$ のとき

①より、 $a^2 \geq 16$ となる a は

$$a = 4, 5, 6$$

となる。

[5] $b=5$ のとき

①より、 $a^2 \geq 20$ となる a は

$$a = 5, 6$$

となる。

[6] $b=6$ のとき

①より、 $a^2 \geq 24$ となる a は

$$a = 5, 6$$

となる。

以上より、①を満たす (a, b) は19通りである。したがって、求める確率は $\frac{19}{36}$ である。

(答) $\frac{19}{36}$

(2)

$2^x = \sqrt{14}$ より、両辺正であるから、両辺の常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^x &= \log_{10} \sqrt{14} \\ \Leftrightarrow x \log_{10} 2 &= \frac{1}{2} (\log_{10} 2 + \log_{10} 7) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} &= \frac{2 \log_{10} 2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 7} \end{aligned}$$

を得る。また、 $7^y = \sqrt{14}$ より、両辺正であるから、同様に両辺の常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 7^y &= \log_{10} \sqrt{14} \\ \Leftrightarrow y \log_{10} 7 &= \frac{1}{2} (\log_{10} 2 + \log_{10} 7) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y} &= \frac{2 \log_{10} 7}{\log_{10} 2 + \log_{10} 7} \end{aligned}$$

を得る。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{2 \log_{10} 2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 7} + \frac{2 \log_{10} 7}{\log_{10} 2 + \log_{10} 7} \\ &= \frac{2(\log_{10} 2 + \log_{10} 7)}{\log_{10} 2 + \log_{10} 7} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(3)

4次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が $x = \sqrt{2} + i$ を解にもつことから

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + i)^4 + a(\sqrt{2} + i)^3 + b(\sqrt{2} + i)^2 + c(\sqrt{2} + i) + d &= 0 \\ \Leftrightarrow (-7 + 4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2} + 5i) + b(1 + 2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2} + i) + d &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(-7 + b + d) + (-a + c)\sqrt{2}\} + \{(5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2}\}i &= 0 \end{aligned}$$

となる。 a, b, c, d は実数であるから、 $(-7 + b + d) + (-a + c)\sqrt{2}$, $(5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2}$ は実数であり、複素数の相等より

$$\begin{cases} (-7 + b + d) + (-a + c)\sqrt{2} = 0 \\ (5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

となる。また、 a, b, c, d は有理数であるから、 $-7 + b + d$, $-a + c$, $5a + c$, $4 + 2b$ は有理数であり、無理数の相等より

$$\begin{cases} -7 + b + d = 0 \\ -a + c = 0 \\ 5a + c = 0 \\ 4 + 2b = 0 \end{cases}$$

となる。これを解いて、 $(a, b, c, d) = (0, -2, 0, 9)$ を得る。

(答) $(a, b, c, d) = (0, -2, 0, 9)$

(1)

$$\begin{aligned}
 P(x, y, z) &= xyz - 3xy - 2xz - yz + 6x + 3y + 2z - 6 \\
 &= (yz - 3y - 2z + 6)x - (yz - 3y - 2z + 6) \\
 &= (x-1)(y-2)(z-3)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad P(x, y, z) = (x-1)(y-2)(z-3)$$

(2)

$$\begin{aligned}
 P(0, y, z) &= 1 \\
 \Leftrightarrow (0-1)(y-2)(z-3) &= 1 \\
 \Leftrightarrow (y-2)(z-3) &= -1
 \end{aligned}$$

であるから、これを満たすのは

$$(y-2, z-3) = (1, -1), (-1, 1)$$

となる。よって、

$$(y, z) = (3, 2), (1, 4)$$

を得る。

$$(答) \quad (y, z) = (3, 2), (1, 4)$$

(3)

$$\begin{aligned}
 xyz - 3xy - 2xz - yz + 6x + 3y + 2z - 7 &= 0 \\
 \Leftrightarrow P(x, y, z) &= 1 \\
 \Leftrightarrow (x-1)(y-2)(z-3) &= 1
 \end{aligned}$$

となる。 x, y, z は自然数であり、 $x-1 \geq 0$, $y-2 \geq -1$, $z-3 \geq -2$ となるから、これを満たす整数 $(x-1, y-2, z-3)$ の組は

$$(x-1, y-2, z-3) = (1, 1, 1), (1, -1, -1)$$

であり、このとき

$$(x, y, z) = (2, 3, 4), (2, 1, 2)$$

となる。

$$(答) \quad (x, y, z) = (2, 3, 4), (2, 1, 2)$$

(1)

$$f(x) = \sqrt{2}x^3 - 3(\sin a)x^2 + \sin a \cos 2a \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sqrt{2}x^2 - 6(\sin a)x \\ &= 3\sqrt{2}x(x - \sqrt{2}\sin a) \end{aligned}$$

となる。また、 $f'(x) = 0$ となる x は

$$x = 0, \sqrt{2}\sin a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 3\sqrt{2}x(x - \sqrt{2}\sin a), \quad x = 0, \sqrt{2}\sin a$$

(2)

$0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sqrt{2}\sin a \geq 0$ であるから、(1)より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}\sin a$	$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	$\nearrow$	$\sin a \cos 2a$	$\searrow$	$-2\sin^3 a + \sin a \cos 2a$	$\nearrow$

よって、増減表より、 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつには、

$$\begin{cases} f(0) > 0 & \cdots \text{①} \\ f(\sqrt{2}\sin a) < 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

となればよい。①について、

$$\begin{aligned} f(0) &> 0 \\ \Leftrightarrow \sin a \cos 2a &> 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2a &> 0 \quad (\because \sin a > 0) \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲でこれを解くと、 $0 \leq a < \frac{\pi}{4}$ を得る。また、②について

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}\sin a) &< 0 \\ \Leftrightarrow -2\sin^3 a + \sin a \cos 2a &< 0 \\ \Leftrightarrow \sin a(\cos 2a - 2\sin^2 a) &< 0 \\ \Leftrightarrow \sin a\{2\cos^2 a - 1 - 2(1 - \cos^2 a)\} &< 0 \\ \Leftrightarrow \sin a(4\cos^2 a - 3) &< 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 a < \frac{3}{4} \quad (\because \sin a > 0) \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos a < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲でこれを解くと、 $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2}$ となる。したがって、①、②をともに満

たす a の範囲は

$$\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{4}$$