

(1)

$$f(x) = x^3 f(x-1) + 3x^5 + 3x^4 - x^3 \cdots \textcircled{1}$$

①に $x=0$ を代入して

$$f(0) = 0$$

となる。また、①に $x=1$ を代入して

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。①に $x=2$ を代入して

$$\begin{aligned} f(4) &= 8f(1) + 96 + 48 - 8 \\ &= 176 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 5, \quad f(4) = 176$$

(2)

$f(x)$ の最高次の係数を a とすると、 $n-1$ 次以下の整式 $g(x)$ を用いて

$$f(x) = ax^n + g(x)$$

と表せる。 $(a \neq 0)$ ここで、 $f(x^2)$ について

$$f(x^2) = ax^{2n} + g(x^2)$$

となり、また、 $x^3 f(x-1)$ について、 $n+2$ 次以下の整式 $h(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} x^3 f(x-1) &= x^3 \{a(x-1)^n + g(x-1)\} \\ &= ax^{n+3} + h(x) \end{aligned}$$

と表せる。よって、 $a \neq 0$ より、 $f(x^2)$ の次数は $2n$ 、 $x^3 f(x-1)$ の次数は $n+3$ となる。

$$(\text{答}) \quad f(x^2) \text{ の次数は } 2n, \quad x^3 f(x-1) \text{ の次数は } n+3$$

(3)

$n \geq 4$ と仮定する。(2)より、①の左辺は $2n$ 次式、右辺は

$$n+3 \geq 7 > 5$$

より、 $n+3$ 次式となることから、

$$\begin{aligned} 2n &= n+3 \\ \Leftrightarrow n &= 3 \end{aligned}$$

となるが、これは $n \geq 4$ に矛盾する。よって、仮定は誤りであり、 $n \geq 4$ ではない。

(証明終)

(4)

(3)より、 $n \leq 3$ であるから、 $f(x)$ は実数 a, b, c, d を用いて

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とおける。①に代入して

$$\begin{aligned} ax^6 + bx^4 + cx^2 + d &= x^3 \{a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d\} + 3x^5 + 3x^4 - x^3 \\ \Leftrightarrow ax^6 + bx^4 + cx^2 + d &= x^3 \{a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + b(x^2 - 2x + 1) + c(x-1) + d\} + 3x^5 + 3x^4 - x^3 \\ \Leftrightarrow ax^6 + bx^4 + cx^2 + d &= ax^6 + (b-3a+3)x^5 + (3a-2b+c+3)x^4 + (-a+b-c+d-1)x^3 \end{aligned}$$

となる。これが x についての恒等式となることから、係数を比較して

$$\begin{cases} a = a \\ 0 = b - 3a + 3 \\ b = 3a - 2b + c + 3 \\ 0 = -a + b - c + d - 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

となるから、これらの式を満たすのは

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

となる。したがって、 $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

(1)

$$x \cos \theta - \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = x \cos \theta$$

となり, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$x^2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

を得る。 $\sin \theta = x \cos \theta$ より,

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(2)

(1)より,

$$\begin{cases} 0 < t < \theta \text{ のとき, } x \cos t - \sin t > 0 \\ \theta \leq t < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } x \cos t - \sin t \leq 0 \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x \cos t - \sin t| dt \\ &= \int_0^{\theta} (x \cos t - \sin t) dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \{-(x \cos t - \sin t)\} dt \\ &= [x \sin t + \cos t]_0^{\theta} - [x \sin t + \cos t]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= x \sin \theta + \cos \theta - 1 - \{x - (x \sin \theta + \cos \theta)\} \\ &= 2(x \sin \theta + \cos \theta) - x - 1 \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - x - 1 \\ &= 2\sqrt{x^2 + 1} - x - 1 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。 $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ より, $f'(x) = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 &= x^2 + 1 \quad (\because x > 0) \\ \therefore x &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

を得る。よって, $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{3} - 1$	$\nearrow$

したがって, $f(x)$ の最小値は $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $\sqrt{3} - 1$ である。

(答) $\sqrt{3} - 1$