

(1)

$$f(x^2) = x^3 f(x-1) + 3x^5 + 3x^4 - x^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

①式に $x=0$ を代入すると、

$$f(0) = 0$$

となる。①式に $x=1$ を代入すると、

$$f(1) = 1 \cdot f(0) + 3 + 3 - 1 = 5$$

となる。①式に $x=2$ を代入すると、

$$f(4) = 2^3 \cdot f(1) + 2^3 (3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1) = 176$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(0) = 0, f(1) = 5, f(4) = 176$$

(2)

$f(x)$ は n 次の整式であるから、

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \dots \textcircled{2}$$

とかける。ただし、 $a_n \neq 0$ である。 $f(x-1)$ の次数について考える。 $g(x)$ を $n-1$ 次以下の整式とすると、

$$\begin{aligned} f(x-1) &= \sum_{k=0}^n a_k (x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ a_k \cdot \sum_{m=0}^k C_m^k x^m (-1)^{k-m} \right\} \\ &= a_n x^n + g(x) \end{aligned}$$

とかける。よって、 $f(x-1)$ は n 次の整式である。よって、 $x^3 f(x-1)$ は $n+3$ 次の整式である。

また、 $f(x^2)$ は

$$f(x^2) = \sum_{k=0}^n a_k (x^2)^k = a_n x^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{2k}$$

と変形できるため、 $a_n \neq 0$ であり、 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{2k}$ の次数は $2n-2$ 以下であることから、 $f(x^2)$ の次数は $2n$ である。

$$(\text{答}) \quad f(x^2) \text{ の次数は } 2n, \quad x^3 f(x-1) \text{ の次数は } n+3$$

(3)

背理法を利用して、 $n \geq 4$ でないことを示す。すなわち、 $n \geq 4$ であると仮定して矛盾を導く。

(2)より、①の左辺の次数は $2n$ であり、右辺の次数は

$$n+3 \geq 7 > 5$$

であるため、 $n+3$ である。ゆえに、

$$\begin{aligned} 2n &= n+3 \\ \Leftrightarrow n &= 3 \end{aligned}$$

となるが、これは $n \geq 4$ に矛盾する。よって、仮定は誤りであり、 $n \geq 4$ ではない。

(証明終)

(4)

(3)より、 $f(x)$ は3次以下の整式である。 $f(0)=0$ であるから、 $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$ とかける。①式に代入すると、

$$f(x^2) = x^3 \{ a_3 (x-1)^3 + a_2 (x-1)^2 + a_1 (x-1) \} + 3x^5 + 3x^4 - x^3$$

となる。整理すると、

$$f(x^2) = a_3 x^6 + (-3a_3 + a_2 + 3)x^5 + (3a_3 - 2a_2 + a_1 + 3)x^4 + (-a_3 + a_2 - a_1 - 1)x^3$$

となる。一方、 $f(x^2) = a_3 x^6 + a_2 x^4 + a_1 x^2$ と表せる。係数比較すると、

$$\begin{cases} -3a_3 + a_2 + 3 = 0 & \dots \textcircled{3} \\ 3a_3 - 2a_2 + a_1 + 3 = a_2 & \dots \textcircled{4} \\ -a_3 + a_2 - a_1 - 1 = 0 & \dots \textcircled{5} \\ a_1 = 0 & \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと、 $a_3 = 2, a_2 = 3, a_1 = 0$ となる。このとき、確かに③、④、⑤、⑥式は成り立つ。よって、 $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

(1)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos \theta > 0$ である。両辺を $\cos \theta$ で割って, $x = \tan \theta$ を得る。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より,

$x = \tan \theta > 0$ であるから, 底辺が 1, 高さが x の直角三角形の正弦と余弦を考えると,

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2)

$x > 0$ と $x \leq 0$ で場合分けして考える。

[1] $x > 0$ のとき,

$g(t) = x \cos t - \sin t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) とおく。 $g(t) > 0$ とすると, $\cos t > 0$ であるから,

$$g(t) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \tan t$$

となる。 $\tan \alpha = x$ となる α をとる ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)。ここで $x > \tan t \Leftrightarrow \alpha > t$ より, $0 < t < \alpha$ の

とき $g(t) > 0$ となり, $\alpha \leq t < \frac{\pi}{2}$ のとき $g(t) \leq 0$ となる。よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(t)| dt \\ &= \int_0^{\alpha} g(t) dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (-g(t)) dt \\ &= \int_0^{\alpha} (x \cos t - \sin t) dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - x \cos t) dt \\ &= [x \sin t + \cos t]_0^{\alpha} + [-\cos t - x \sin t]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2(x \sin \alpha + \cos \alpha) - 1 - x \end{aligned}$$

となる。ここで, α は $\tan \alpha = x$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす値であるため, (1) より,

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) - x - 1 \\ &= 2\sqrt{x^2+1} - x - 1 \end{aligned}$$

となる。以下, $f(x)$ の増減を調べる。 $f(x)$ を x で微分して,

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

を得る。 $f'(x) > 0$ とおくと,

$$f'(x) > 0$$

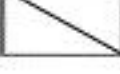
$$\Leftrightarrow 2x > \sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 > x^2+1 \quad (\because x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because x > 0)$$

となる。したがって, 増減表は以下ようになる。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, $x > 0$ のとき, $f(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で最小となり, $f(x)$ の最小値は,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 2\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

である。

[2] $x \leq 0$ のとき,

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\cos t > 0$, $\sin t > 0$ であるから, $x \cos t - \sin t < 0$ となる。よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(x \cos t - \sin t) dt \\ &= [-x \sin t - \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -x + 1 \end{aligned}$$

となる。したがって, $x \leq 0$ のとき, $f(x)$ は単調減少であるから, $f(x) \geq f(0) = 1$ となる。

以上 [1], [2] より, $1 > \sqrt{3} - 1$ であるから, $f(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 最小値 $\sqrt{3} - 1$ をとる。

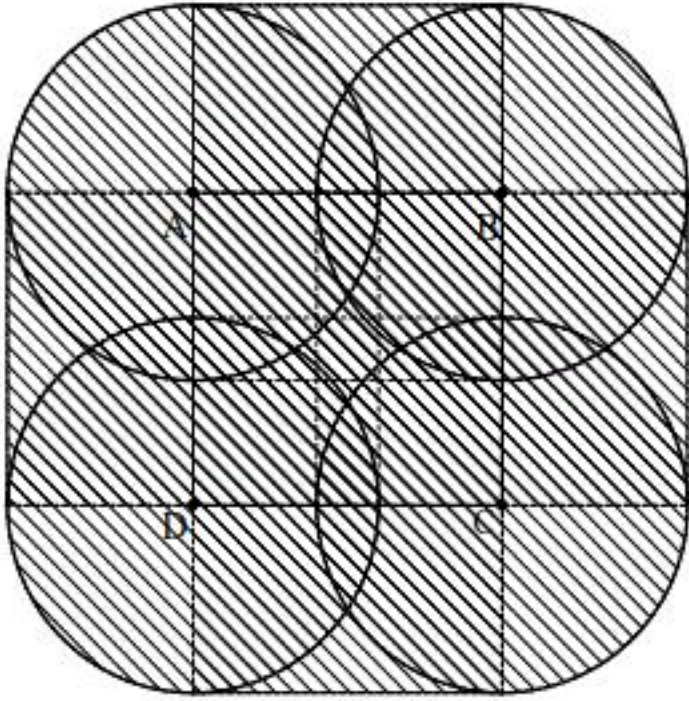
(答) $\sqrt{3} - 1$

3

(1)

[1] $r \geq \frac{1}{2}$ のとき

点 P が正方形 ABCD の辺の上を 1 周すると、円の通過領域は以下の図の斜線部となる。



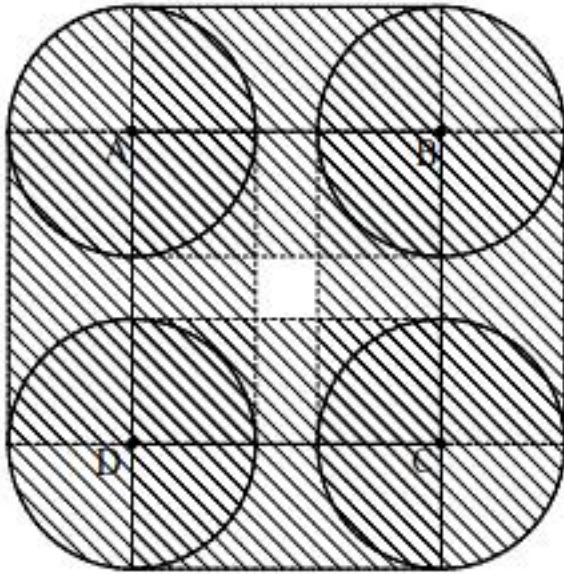
上の図形を 4 つの長方形と 4 つの四分円と正方形 ABCD に分けて円の通過領域の面積 $S(r)$ を求めると、

$$S(r) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot r + 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2 = 1 + 4r + \pi r^2$$

となる。

[2] $0 < r < \frac{1}{2}$ のとき

点 P が正方形 ABCD の辺の上を 1 周すると、円の通過領域は以下の図の斜線部となる。



中央の斜線部でない領域の図形は 1 辺の長さが $1 - 2r$ の正方形であるから、[1] の場合と同様に考えると、通過領域の面積 $S(r)$ は、

$$S(r) = 1 + 4r + \pi r^2 - (1 - 2r)^2 = 8r - (4 - \pi)r^2$$

となる。

(答)

$$1 + 4r + \pi r^2 \quad (r \geq \frac{1}{2} \text{ のとき})$$

$$8r - (4 - \pi)r^2 \quad (0 < r < \frac{1}{2} \text{ のとき})$$

(2)

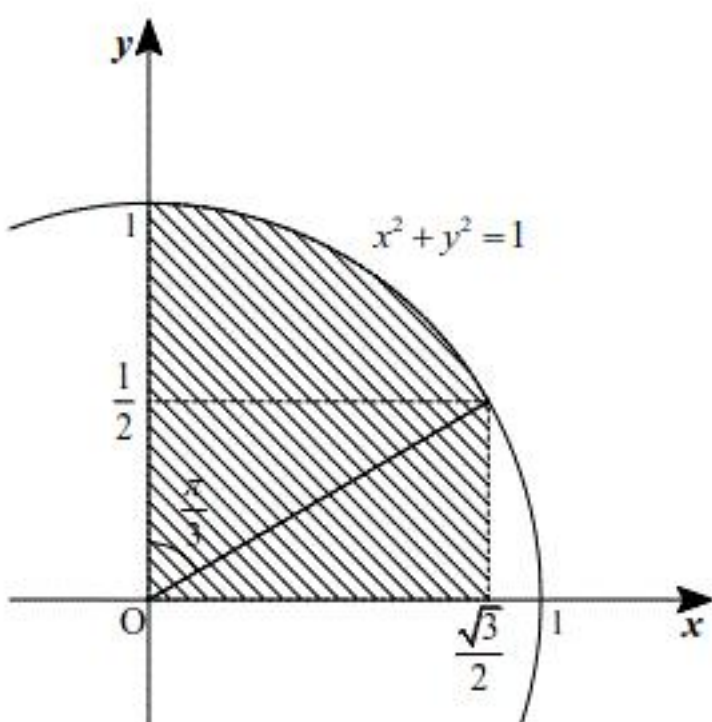
xyz 空間を考え、xy 平面上に正方形 ABCD があるとする。体積を求める図形は xy 平面に対して対称な図形であるから $z \geq 0$ について考えればよい。 $z = t$ における図形の断面図を考えると、1 辺の長さが 1 の正方形の辺の上を点 P' が 1 周するとき、点 P' を中心とする半径 $\sqrt{1 - t^2}$ の円が通過する領域に等しい。

[1] $\sqrt{1 - t^2} \geq \frac{1}{2}$ 、すなわち $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

(1) の結果を用いると、 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ の部分の体積は、

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ 1 + 4\sqrt{1 - t^2} + \pi(1 - t^2) \right\} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ (\pi + 1) - \pi t^2 \right\} dt + 4 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - t^2} dt \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - t^2} dt$ は以下の図の斜線部の面積に等しい。



よって、①を計算すると、

$$\left[(\pi + 1)t - \frac{\pi}{3} t^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 4 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{2}{3} \right) \pi + \sqrt{3}$$

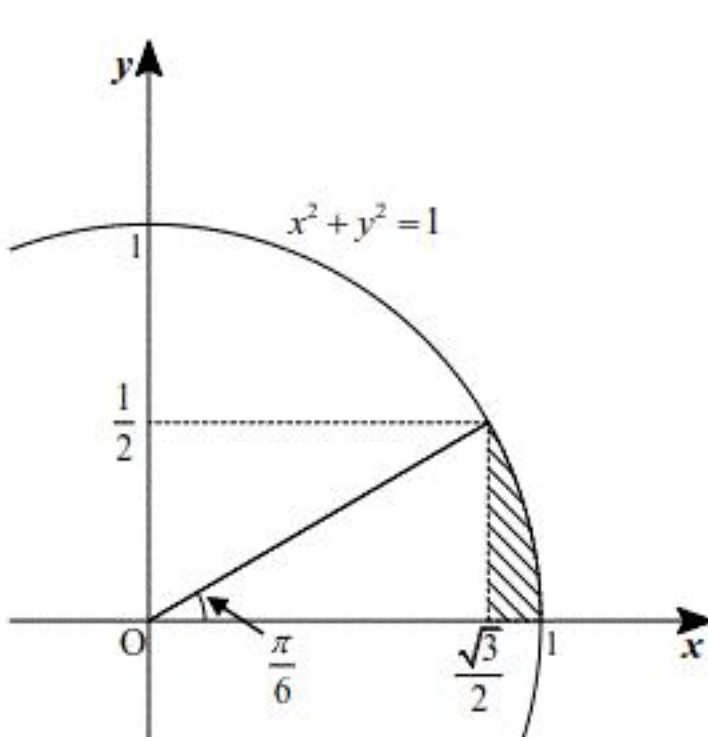
となる。

[2] $\sqrt{1 - t^2} < \frac{1}{2}$ 、すなわち $\frac{\sqrt{3}}{2} < t \leq 1$ のとき

(1) の結果を用いると、 $\frac{\sqrt{3}}{2} < t \leq 1$ の部分の体積は、

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left\{ 8\sqrt{1 - t^2} - (4 - \pi)(1 - t^2) \right\} dt = 8 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1 - t^2} dt - (4 - \pi) \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1 - t^2) dt \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ は以下の図の斜線部の面積に等しい。



よって、②式を計算すると、

$$8 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - (4 - \pi) \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = \left(\frac{4}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3}$$

となる。

[1], [2] より、求める体積 V は、

$$V = 2 \left\{ \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{2}{3} \right) \pi + \sqrt{3} + \left(\frac{4}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3} \right\} = 4\pi + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3}$$

となる。

(答) $V = 4\pi + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3}$