

〔 1 〕 関数 $f_n(x) = \sin^{n+2}x + 2 \cos^{n+2}x$ ($n = 1, 2, \dots$) について, 次の問いに答えよ。

(1) 閉区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L_n}$ を求めよ。

〔 2 〕 e を自然対数の底とするととき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき，不等式 $e^x \geq 1 + x$ を示せ。

(2) $\tan \theta = M$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) のとき，等式 $\int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \theta$ を示せ。

(3) $M > 0$ のとき，不等式 $\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}} dx < \frac{\pi}{2}$ を示せ。

〔 3 〕 すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}} \leq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。

〔 4 〕 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 = A$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $a + d \neq 1$ のとき、 A を決定せよ。

(2) 実数 u, v, x, y が $ux + vy = 1$ を満たすとき、2次正方行列

$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ は $X^2 = X$ を満たすことを示せ。

(3) $a + d = 1$ のとき、 $d \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が成り立ち、 A は(2)の X の形になることを示せ。

〔 5 〕 次の問いに答えよ。

- (1) 点 $(3, 0)$ を通り、円 $(x + 3)^2 + y^2 = 4$ と互いに外接する円の中心 (X, Y) の軌跡を求めよ。
- (2) (1) の軌跡上の点と定点 $(0, a)$ との距離の最小値を求めよ。

- [6] 2つの変量 X, Y のそれぞれについて m 個の資料 $x_1, \dots, x_m$, および n 個の資料 $y_1, \dots, y_n$ が与えられている。 X, Y の資料に対する平均を $\bar{x}, \bar{y}$, 分散を S_x^2, S_y^2 とする。 X と Y の資料を合わせてえられる $(m+n)$ 個の資料 $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ の平均を $\bar{z}$, 分散を S_z^2 とする。このとき, 次の等式を示せ。

$$(1) \quad \bar{z} = \frac{1}{m+n} (m\bar{x} + n\bar{y})$$

$$(2) \quad S_z^2 = \frac{mS_x^2 + nS_y^2}{m+n} + \frac{mn}{(m+n)^2} (\bar{x} - \bar{y})^2$$

〔 7 〕 自然数 n を与え、関数

$$f(x) = \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{n-1}}{n} + \cdots + \frac{x}{2} + 1$$

を定義するとき、方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求めるプログラムを考える。ただし、 $x = c$ での関数値 $f(c)$ の計算には $P_0 = \frac{1}{n+1}$ を初項とする漸化式

$$P_{k+1} = c P_k + \frac{1}{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

を用いる。以下の問いに答えよ。

(1) P_2 を求めよ。

(2) P_k を求め、 $P_n = f(c)$ を確かめよ。

(3) $f(a)f(b) < 0$ となる実数 $a, b (a < b)$ が与えられたときに、閉区間 $[a, b]$ における方程式 $f(x) = 0$ の近似解を 2 分法によって求めるプログラムを書け。ただし、反復を停止する条件は区間幅が 10^{-4} 以下とする。