

[1] $f(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ において連続かつ, $0 < x < 1$ において微分可能で $f'(x) > 0$ を満たす関数とする。 $0 < t < 1$ に対し

$$I(t) = \int_0^1 |f(t) - f(x)| x \, dx$$

とおく。

- (1) 導関数 $I'(t)$ を求めよ。
- (2) $I(t)$ が最小となる t の値を求めよ。

[2]

- (1) $x > 0$ に対して次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

- (2) $f(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ で連続で, $f(x) \geq 0$ を満たす関数とする。

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\right),$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

とおくとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^I$$

であることを示せ。

〔 3 〕 曲線 $y = x(1 - x) (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に、単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1) 水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(2) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

〔 4 〕 数列 $\{a_n\}$ と数 c が次の条件を満たすとする。

$$a_1 = 2, a_2 = 2,$$

$$a_{n+1} = 2a_n + ca_{n-1},$$

$$a_{n+2} = (2c + 1)a_n + 6a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

(1) c を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 A を求めよ。

(3) $A \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ を満たす数 b をすべて求めよ。

(4) a_n を求めよ。

〔5〕 C を双曲線 $2x^2 - 2y^2 = 1$ とする。 l, m を点 $(1, 0)$ を通り、 x 軸とそれぞれ $\theta, \theta + \frac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\frac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1) 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2) PQ^2 を、 θ を用いて表せ。

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき、 $\frac{1}{PQ^2} + \frac{1}{RS^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。

[6]
$$f(x) = \frac{1}{4x^8 + 5x^3 + 1}$$

とする。区間 $[0, 1]$ を n 等分した分点を

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = 1$$

とする。

(1) 不等式

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

を示せ。

(2) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ と $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ がともに $\int_0^1 f(x) dx$ の小数第 3 位までの近似値となるためには、 n をどのくらい大きくとればよいか。

(3) (2) の結果を用いて、 $\int_0^1 f(x) dx$ の小数第 3 位までの近似値を計算するプログラムを書け。

〔 7 〕 生徒数 32 名のある学級で生徒の兄弟姉妹の数(x)と、いとこの数(y)とを調べたところ、次の表を得た。

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	3	4	1	0
1	4	4	4	4
2	0	1	4	3

- (1) 変量 y の平均 μ_y と分散 σ_y^2 を求めよ。
- (2) 変量 x と変量 y の相関関係について説明せよ。
- (3) 2 人の生徒を無作為に復元抽出し、いとこの数 Y_1, Y_2 を調べる。標本 Y_1, Y_2 について、標本平均の期待値を求めよ。また、この場合、標本平均の分散は標本分散の期待値に等しくなることを示し、その値を求めよ。