

[1]

$$(1) \quad f_0(x) = \frac{\log|x|}{x} \quad (|x| > 1)$$

$$f_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (|x| \leq 1)$$

とおく。 $f(x)$ が $x = \pm 1$ で微分可能であることから、

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f_0(x) = f_1(\pm 1) \quad (\text{複号同順}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f'_0(x) = f'_1(\pm 1) \quad (\text{複号同順}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①より

$$\begin{cases} 0 = a + b + c + d & \cdots \textcircled{3} \\ 0 = -a + b - c + d & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -a + b - c + d & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

また、 $f'_0(x) = \frac{1 - \log|x|}{x^2}$ より $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f'_0(x) = 1 \quad \therefore \textcircled{2}$ から、

$$\begin{cases} 1 = 3a + 2b + c & \cdots \textcircled{5} \\ 1 = 3a - 2b + c & \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 3a - 2b + c & \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

③, ④, ⑤, ⑥より、 $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -\frac{1}{2}, d = 0$

(2) $|x| > 1$ での最大値と、 $|x| \leq 1$ での最大値を各々求めて比較する。

Case 1. $|x| > 1$ のとき

$$f(x) = f_0(x) \text{ より, } f'(x) = \frac{1 - \log|x|}{x^2}$$

よって、増減表をかくと

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-e$	$\cdots$	(-1)	$\diagdown$	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$\diagdown$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$	(0)	$\diagdown$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

$$\therefore \text{このときの最大値は } f_0(e) = \frac{1}{e}$$

Case 2. $|x| \leq 1$ のとき

$$f(x) = f_1(x) \text{ より,}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

よって、増減表をかくと

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\therefore f_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9} \left(= \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \quad f_1(1) = 0$$

$$\text{したがって、このときの最大値は } f_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{したがって、} 2 < e < 3 \text{ より } e < 3\sqrt{3} \quad \therefore \frac{1}{e} > \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{よって、} f(x) \text{ の最大値は } \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

[2]

$$(1) \quad f'(x) = 3\sin^2 x \cos x \text{ より, } \underline{f'(0)=0, f'(2\pi)=0}$$

(2) 三倍角の公式より,

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \therefore \quad \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} dx \\ &= \left[-\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x \right]_0^{2\pi} = \underline{0} \end{aligned}$$

(3) $p(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおくと, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p(x) f''(x) dx &= [p(x) f'(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p'(x) f'(x) dx \\ &= p(2\pi) f'(2\pi) - p'(0) f'(0) - \int_0^{2\pi} p'(x) f'(x) dx \\ &= - \int_0^{2\pi} p'(x) f'(x) dx \\ &= -[p'(x) f(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} p''(x) f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{ここで } p''(x) = a \text{ より } \int_0^{2\pi} p''(x) f(x) dx &= a \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0 \quad (\because (2)) \\ &= -(p'(2\pi) f(2\pi) - p'(0) f(0)) \end{aligned}$$

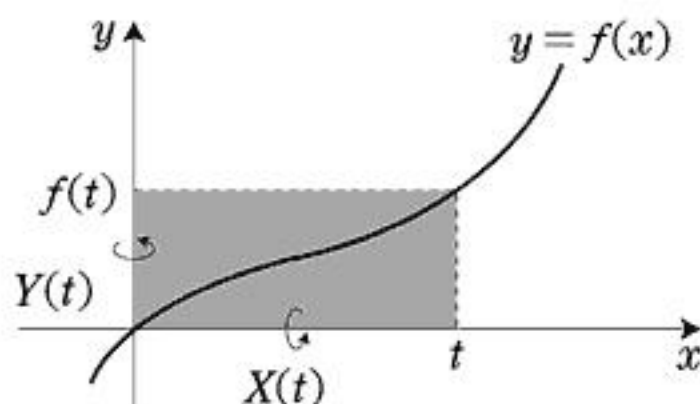
$$(f(2\pi) = \sin^3 2\pi = 0, \quad f(0) = \sin^3 0 = 0 \text{ より})$$

$$= \underline{0}$$

[3]

$$(1) \quad X(t) = \int_0^t \pi \{f(x)\}^2 dx$$

$$Y(t) = \int_0^{f(t)} \pi x^2 dy$$



$$\left(\begin{array}{l} y=f(x) \text{ とすると} \\ dy=f'(x)dx \end{array} \quad \begin{array}{l} f \text{ の単調性より} \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} y & 0 & \nearrow & f(t) \\ \hline x & 0 & \nearrow & t \end{array} \right)$$

$$= \int_0^t \pi x^2 f'(x) dx$$

したがって、微分積分学の基本定理より、

$$\underline{X'(t) = \pi f(t)^2} \quad \underline{Y'(t) = \pi t^2 f'(t)}$$

$$(2) \quad \text{仮定より, } X'(t) = Y'(t) \quad (t \geq 0)$$

$$\text{つまり, } f(t)^2 = t^2 f'(t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

まず、 $f(x)$ の次数に着目する。 $f(x)$ が m 次だとすると、

①の左辺より、 $f(t)^2$ は $2m$ 次。

①の右辺より、 $t^2 f'(t)$ は $m-1+2=m+1$ 次

$$\text{したがって, } 2m = m+1 \quad \therefore m=1$$

つまり、 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) とおける。このもとで

$$\textcircled{1} \text{ の左辺} = a^2 t^2 + 2abt + b^2$$

$$\textcircled{1} \text{ の右辺} = at^2$$

$$\therefore a=1, b=0 \quad \text{したがって, } \underline{f(x) = x}$$

$$(3) \quad f(t)^2 = \frac{t^2}{(t+1)^2}, \quad t^2 f'(t) = t^2 \cdot \frac{t+1-t}{(t+1)^2} = \frac{t^2}{(t+1)^2}$$

よって、 $X'(t) = Y'(t)$ を得る。

したがって、 $X(t) - Y(t) = C$ (C は定数)

$$\text{とかけ, } X(0) = Y(0) = 0 \text{ より, } C=0 \quad \therefore \underline{X(t) = Y(t)}$$

$$(1) \quad X^2 + aX + bE = O \quad \cdots \textcircled{1} \quad \text{とおく。}$$

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$X^2 - (x+w)X + (xw - yz)E = O \quad \cdots \textcircled{2}$$

①と②の辺々を引いて

$$\{a + (x+w)\}X + \{b - (xw - yz)E\} = O$$

$x+w \neq -a$ のとき $X = kE$ とかける。

$$\left(k = -\frac{b - (xw - yz)}{a + x + w} E \right)$$

これを①に代入して, $(k^2 + ak + b)E = O$ となり, $E \neq O$ より,

$$k^2 + ak + b = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

ここで, X の各成分が実数であることから, ③は実数解を持つことになり, $a^2 - 4b \geq 0$

さらに, $a^2 - 4b = 0$ のとき③の解は $k = -\frac{a}{2} \quad \therefore x = w = -\frac{a}{2}$
つまり, $x+w = -a$ となり矛盾。

したがって, このとき $a^2 - 4b > 0$ が成立。

また, このとき③の解は

$$k = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \therefore X = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$(2) \quad (1) \text{の対偶より, } x+w = -a \text{ となり, } \textcircled{2} \text{より,}$$

$$\begin{cases} x+w = -a \\ xw - yz = b \end{cases}$$

となる。これより,

$$a^2 - 4b \leq 0 \iff (-x-w)^2 - 4(xw - yz) \leq 0$$

$$\iff x^2 + 2xw + w^2 - 4xw + 4yz \leq 0$$

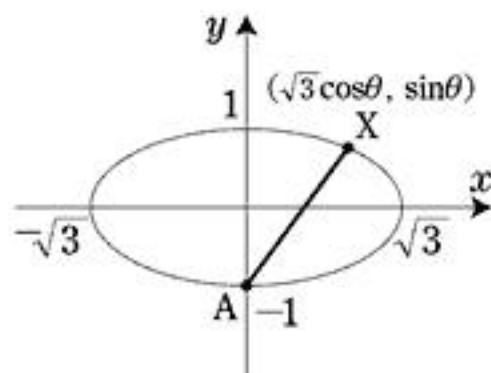
$$\iff (x-w)^2 + 4yz \leq 0$$

$(x-w)^2 \geq 0$ より, $4yz \leq 0$ 　つまり $yz \leq 0$ となる。

(1) C 上の点は $-\pi < \theta \leq \pi$ を用いて, $(\sqrt{3} \cos \theta, \sin \theta)$ とかける。

$X(\sqrt{3} \cos \theta, \sin \theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とおいて,

$$\begin{aligned} AX^2 &= (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sin \theta + 1)^2 \\ &= -2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 4 \\ &= -2 \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$



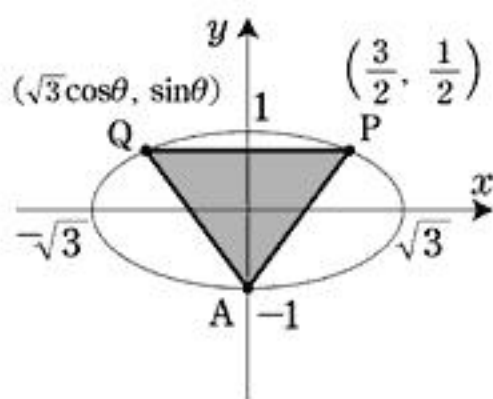
$\therefore AX^2$ は $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$) のとき, 最大値 $\frac{9}{2}$ をとる。

したがって, $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), AP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

(2) $Q(\sqrt{3} \cos \theta, \sin \theta)$ とおく。

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos \theta \\ \sin \theta + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangle APQ &= \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}(\sin \theta + 1) - \frac{3}{2} \sqrt{3} \cos \theta \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} |\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta + 1| \\ &= \frac{3}{4} \left| 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) + 1 \right| \end{aligned}$$



$\therefore \triangle APQ$ は $\sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ すなわち $\theta = \frac{5}{6} \pi$ のとき,

最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。

したがって, $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき, 最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。

[6]

$$(1) \quad P(Z_1 = 1) = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

(2) $X = Z_1 + \cdots + Z_n$ とおくと, $Z \leq k \leq n$ で

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \quad (\text{ただし } p = \frac{\pi}{4}, p + q = 1)$$

となるので, X は二項分布 $B\left(n, \frac{\pi}{4}\right)$ にしたがう。

$$\begin{aligned} \therefore \mu = E(W_n) &= E\left(\frac{4}{n} X\right) & \sigma^2 &= V(W_n) \\ &= \frac{4}{n} E(X) & &= V\left(\frac{4}{n} X\right) \\ &= \frac{4}{n} \cdot n \cdot \frac{\pi}{4} = \pi & &= \frac{4^2}{n^2} V(X) \\ & & &= \frac{16}{n^2} \cdot n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ & & &= \frac{\pi(4 - \pi)}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore \mu = \pi, \quad \sigma^2 = \frac{\pi(4 - \pi)}{n}$$

(3) W_n は正規分布 $N(\mu, \sigma)$ にしたがうとしているので,

$$Z = \frac{W_n - \mu}{\sigma} \text{ とおくと, } Z \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ にしたがう。}$$

このとき, 正規分布表から, Z は 95% の確率で区間

$$-1.96 \leq Z \leq 1.96 \text{ に存在する。} \quad \therefore \mu - 1.96\sigma \leq Z \leq \mu + 1.96\sigma$$

したがって, $1.96\sigma < 0.0034$ であればよい。

$$1.96\sigma < 0.0034 \iff 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\pi(4 - \pi)}{n}} < 0.0034$$

$$\iff \frac{1.96}{0.034} \sqrt{\pi(4 - \pi)} < 10^{\frac{m}{2}}$$

$$\text{ここで, } 100 < 576 \times 1.6 < \frac{1.96}{0.34} \sqrt{\pi(4 - \pi)} < 577 \times 1.7 < 1000$$

$$\text{より, } \frac{m}{2} = 3 \text{ のとき, } m \text{ は最小} \quad \therefore \underline{\underline{m = 6}}$$

[7]

```

(1) 10   DIM  A(20), B(20), C(20)
    20   INPUT  A, B, C
    30   A(0) = A : B(0) = B : C(0) = C
    40   FOR  N = 0  TO  N = 19
    50   A(N + 1) = (B(N) + C(N))/2
    60   B(N + 1) = (C(N) + A(N))/2
    70   C(N + 1) = (A(N) + B(N))/2
    80   NEXT  N
    90   FOR  N = 0  TO  N = 20
    100  PRINT  A(N)
    110  PRINT  B(N)
    120  PRINT  C(N)
    130  NEXT  N
    140  END

```

$$\begin{aligned}
 (2) \quad a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{b_n + c_n}{2} + \frac{c_n + a_n}{2} + \frac{a_n + b_n}{2} \\
 &= a_n + b_n + c_n
 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = A + B + C}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 2a_n - b_n - c_n &= b_{n-1} + c_{n-1} - \frac{c_{n-1} + a_{n-1}}{2} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \\
 &= -\frac{1}{2}(2c_{n-1} - b_{n-1} - c_{n-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 2a_n - b_n - c_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2a_0 - b_0 - c_0) \\
 &= \underline{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (2A - B - C)}
 \end{aligned}$$

(4) (2), (3)の結果の辺々をたしあわせると

$$3b_n = A + B + C + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2A - B - C)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2A - B - C) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\frac{A + B + C}{3}}$$