[1]

$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$ とすると，$f(x) = ax + \frac{1}{4}c^4$.

このとき，

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(at + \frac{1}{4}c^4\right)\sin t\,dt$$

$$= \left[\left(at + \frac{1}{4}c^4\right)(-\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(-\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}c^4 - \left[-a\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}c^4 + a. \quad \therefore a = c - \frac{1}{4}c^4$$

ここで

$g(c) = c - \frac{1}{4}c^4$ とすると，$g'(c) = 1 - c^3$

より，増減は右のようになる．

c	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(c)$	$+$	0	$-$
$g(c)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow -\infty$

よって，$a = g(c)$ なる c が存在するには，$a \leqq \frac{3}{4}$ が

必要で，$\begin{cases} a = \frac{3}{4} \text{ のとき } c \text{ は1個存在し} \cdots ① \\ a < \frac{3}{4} \text{ のとき } c \text{ は2個存在する} \cdots ② \end{cases}$

①のときは成立する．②のときは，2つの解を c_1, c_2 としたとき，$c_1 + c_2 = 0$ であることが $f(x)$ が一意で $(c_1 \neq c_2)$ あることの必要十分条件である．

ところが，$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \cdots ③ \\ c_1 - \frac{1}{4}c_1^4 = c_2 - \frac{1}{4}c_2^4 \cdots ④ \end{cases}$ をみたす

c_1, c_2 は，③から $-\frac{1}{4}c_1^4 = -\frac{1}{4}c_2^4$ なので，④より，$c_1 = c_2$ を満たしてしまう．

よって，②の場合は，$f(x)$ は一意ではない．

$a = \frac{3}{4}$

[2]

(1) 点$P(t, \sin t)$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ における

法線の式は，$y=-\dfrac{1}{\cos t}(x-t)+\sin t$．これが

$(0,1)$を通るので，$1=\dfrac{t}{\cos t}+\sin t$．

この右辺を$f(t)$とすると，$f(t)$は，$0<t<\frac{\pi}{2}$で単調

増加．($\because$ tは単調増加，$\cos t$は正で単調減少，

$\sin t$は単調増加)．

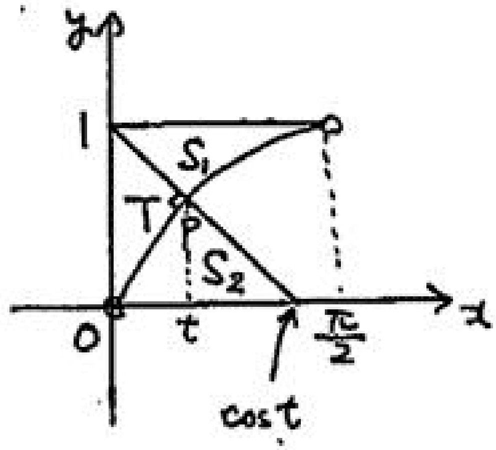
$\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t)=0$，$\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} f(t)=+\infty$ より，$0<t<\frac{\pi}{2}$に，

$f(t)=1$となるtがただ1つ存在する．//

(2) C，l，y軸で囲まれる部分の

面積をTとし，S_1+T，S_2+Tの

大小を比較する．



$$S_1+T=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-1>\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

lのx切片が$\cos t$であることより，

$$S_2+T=\frac{1}{2}\cdot\cos t\cdot 1<\frac{1}{2}.$$

よって，$S_2+T<\frac{1}{2}<S_1+T$なので，$S_2<S_1$ //

[3]

(1) $y'=e^x$ より，Aにおける法線の式は $y=-e^{-a}(x-a)+e^a$，

P 〃 は $y=-e^{-t}(x-t)+e^t$.

交点のx座標は，

$$-e^{-a}x+ae^{-a}+e^a=-e^{-t}x+te^{-t}+e^t$$

$$\Leftrightarrow (e^{-a}-e^{-t})x=(ae^{-a}+e^a)-(te^{-t}+e^t)$$

$$\Leftrightarrow x=\underbrace{\frac{a-t}{e^{-a}-e^{-t}}}_{①}\cdot\underbrace{\frac{(ae^{-a}+e^a)-(te^{-t}+e^t)}{a-t}}_{②}$$

$f_1(t)=e^{-t}$，$f_2(t)=te^{-t}+e^t$ としたとき，$t\to a$ の極限で，

①は $f_1(t)$ の $t=a$ における微分係数の逆数に収束し，

②は $f_2(t)$ の 〃 に収束する。

$f_1'(t)=-e^{-t}$，$f_2'(t)=-te^{-t}+e^{-t}+e^t$ なので，

$$x\to -e^a(-ae^{-a}+e^{-a}+e^a)=a-1-e^{2a}$$

Aにおける法線の傾きは $-e^{-a}$ なので，

$$r(a)=\sqrt{1+(-e^{-a})^2}\,\left|a-(a-1-e^{2a})\right|$$

$$=\sqrt{1+e^{-2a}}\,(1+e^{2a})=\sqrt{\frac{(1+e^{2a})^3}{e^{2a}}}$$

(2) $e^{2a}=t$ とすると，$\{r(a)\}^2=\dfrac{(1+t)^3}{t}=g(t)$ とおく。

$g(t)=\dfrac{(1+t)^3}{t}$ の最小値を求める．$(t>0)$.

t	$(0)\cdots\frac{1}{2}\cdots(\infty)$
$g'(t)$	$-\quad+$
$g(t)$	$\searrow\quad\nearrow$

$$g'(t)=\frac{3(1+t)^2\cdot t-(1+t)^3}{t^2}=\frac{(1+t)^2(2t-1)}{t^2}.$$

右の増減表より，最小値は，$\sqrt{g(\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

[4]

(1) $\det P=0 \iff p-qr=0$.

i) $r=0$ のとき，$p=0$ となり，$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) $r\neq 0$ のとき，$q=\frac{p}{r}$ となり，$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{p}{r} \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$

なので，$k=\frac{1}{r}$ とすれば成立する．

i) ii) より示された．//

(2) 背理法により，「Pは逆行列をもたない」とすると，

(1)より

$$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \cdots ① \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots ②$$

となるが，

・①の成立を仮定すると，$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ の両辺に左から A をかけて，

$$A^2\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=A\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\frac{1}{r}A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$$

一方，$A^2\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\because A^2=O)$ なので，これは矛盾．

②の成立を仮定すると，$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で矛盾．

よって，Pは逆行列をもつことが示された。

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2p+4r=q & \cdots ③ \\ -p-2r=1 & \cdots ④ \end{cases}$

③+④×2 より，$0=q+2$ $\therefore q=-2$．③，④をみたす p, r としては，たとえば $p=-1, r=0$ がとれる．

このとき，$P=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ //

[5]

(1) C_aの式をaについて整理すると，

C_a: $(-2x+y^2-3)a+(x^2-1)=0$.

これがaによらず成立する $\iff$ $-2x+y^2-3=0$ かつ $x^2-1=0$

$\iff$ $y^2=2x+3$ かつ $x=\pm 1$

$\iff$ $(x, y)=(1, \pm\sqrt{5}), (-1, \pm 1)$

これにより，4定点を通ることが示された。//

(2) $a \neq 0$ より，

$$y^2=\frac{a^2+3a+1-(x-a)^2}{a}=\frac{3a+1-x^2+2ax}{a}$$

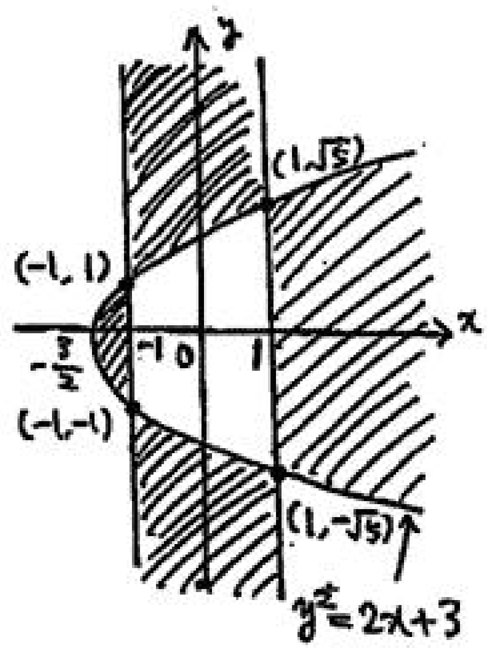
$$=2x+3+\frac{1-x^2}{a}.$$

aが$a>0$の範囲で動くとき，xを固定すると，

- $|x|=1$ のとき $y^2=2x+3$.
- $|x|<1$ のとき $1-x^2>0$ なので，$y^2>2x+3$
- $|x|>1$ のとき，$1-x^2<0$ なので，$y^2<2x+3$

の範囲を動く。

よって，C_aが通過する範囲は，右図の斜線部。境界上の点は，(1)の4定点のみ含む。



[6]

1回目, 2回目, 3回目の試験を受験した生徒の得点の2乗の和を, $\sum_{i=1}^{30} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{30} y_i^2$, $\sum_{i=1}^{24} z_i^2$ と表す.

(1) 1回目と2回目の平均は $\frac{62+60}{2}=61$.

求める分散を V_2 とすると,

$$\frac{\sum x_i^2}{30}-62^2=36 \cdots ①, \quad \frac{\sum y_i^2}{30}-60^2=V_2 \cdots ②,$$

$$\frac{\sum x_i^2+\sum y_i^2}{60}-61^2=44 \cdots ③$$

①+②−③×2 により,

$$-62^2-60^2+2\times 61^2=36+V_2-2\times 44 \iff \underline{V_2=50}$$

(2) 相関係数 ρ は, $\rho=\frac{20}{\sqrt{36\cdot 50}}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

(3) 全体の平均は $\frac{62\times 30+60\times 30+54\times 24}{30+30+24}=59$.

求める分散を V とすると,

$$\frac{\sum z_i^2}{24}-54^2=51 \cdots ④, \quad \frac{\sum x_i^2+\sum_{i=1} y_i^2+\sum z_i^2}{84}-59^2=V \cdots ⑤$$

③より, $\sum_{i=1}^{30} x_i^2+\sum_{i=1}^{30} y_i^2=60(44+61^2)=6\times 37650$

④より, $\sum_{i=1}^{24} z_i^2=24(51+54^2)=6\times 11868$

⑤に代入して, $V=\frac{37650+11868}{14}-3481=\underline{56}$.

[7]

(1)

```
100 INPUT "N=";N
110 INPUT "A=";A
120 B=N-A^2
130 X=A
140 IF ABS(X^2-N)<0.0001
    THEN GOTO 180
150 Y=A+B/(X+A)
160 X=Y
170 GOTO 140
180 PRINT X
190 END
```

(2) $x_{n+1}-\sqrt{N}=a+\dfrac{N-a^2}{x_n+a}-\sqrt{N}$

$=(a-\sqrt{N})+\dfrac{(\sqrt{N}+a)(\sqrt{N}-a)}{x_n+a}$

$=\dfrac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}(x_n+a-\sqrt{N}-a)$

$=\dfrac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}(x_n-\sqrt{N})$ //

(3) (補題) (i) $x_n\geqq a$ (ii) $\dfrac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}<0$ (iii) $\left|\dfrac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}\right|<\dfrac{1}{2}$

(補題の証明) (i) 帰納的に明らか

(ii) $a-\sqrt{N}<0$ ($\because b>0$), $x_n+a>0$ より成立.

(iii) $a\leqq\sqrt{N}<a+1$ なので, $|a-\sqrt{N}|<1$. これと(i)より,

$\left|\dfrac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}\right|<\left|\dfrac{1}{a+a}\right|=\dfrac{1}{2a}\leqq\dfrac{1}{2}$. //

(本問の証明). ① $x_0<\sqrt{N}$ ② 任意のmで $x_m-\sqrt{N}$ と $x_{m+1}-\sqrt{N}$ は異符号 ③ $\{|x_m-\sqrt{N}|\}$ は単調減少.

を示せば十分. ①は $b>0$ より成立 (これと(ii), (2)より $x_m=\sqrt{N}$ とはならない) ②は, (2), (ii) より成立 ③は, (2), (iii) から

$|x_{m+1}-\sqrt{N}|<\dfrac{1}{2}|x_m-\sqrt{N}|$ ……④ となるので成立. 以上により示された. //

(4) <u>$b>0$のとき</u> ④をくり返し用いて, $|x_n-\sqrt{N}|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}|x_1-\sqrt{N}|\to 0$ $(n\to\infty)$

となり, 成立.

<u>$b=0$のとき</u> 任意のmで $x_n=a=\sqrt{N}$ となるので成立.

以上により示された.