

【1】

(1)

$$\begin{aligned}(x^2+t)^2 - f(x) &= x^4 + 2tx + t^2 - (x^4 + 2x^2 - 4x + 8) \\ &= 2(t-1)x^2 + 4x + t^2 - 8\end{aligned}$$

$$(px+q)^2 = p^2x^2 + 2pqx + q^2$$

上の2つの式は、 x に関する恒等式である。両者の係数を比較すると

$$\begin{cases} 2(t-1) = p^2 \\ 4 = 2pq \\ t^2 - 8 = q^2 \end{cases}$$

となる。 p, q はともに整数なので、2つ目の式より

$$(p, q) = (1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$$

の4組が考えられる。これらについて検討する。

[1] $(p, q) = (1, 2)$ のとき

$$2(t-1) = p^2 \text{ に代入して } t \text{ を求めると}$$

$$t = \frac{3}{2}$$

となるが、この場合は t が整数とならないため不適である。

[2] $(p, q) = (2, 1)$ のとき

$$[1] \text{と同様に } 2(t-1) = p^2 \text{ に代入して } t \text{ を求めると}$$

$$t = 3$$

となる。これは $t^2 - 8 = q^2$ も満たすので、適する。

[3] $(p, q) = (-1, -2)$ のとき

$$[1] \text{と同様に } 2(t-1) = p^2 \text{ に代入して } t \text{ を求めると}$$

$$t = \frac{3}{2}$$

となるが、この場合は t が整数とならないため不適である。

[4] $(p, q) = (-2, -1)$ のとき

$$[1] \text{と同様に } 2(t-1) = p^2 \text{ に代入して } t \text{ を求めると}$$

$$t = 3$$

となる。これは $t^2 - 8 = q^2$ も満たすので、適する。

以上[1]～[4]より、求める t, p, q の組は

$$(t, p, q) = (3, 2, 1) \text{ または } (3, -2, -1)$$

である。

$$(\text{答}) (t, p, q) = (3, 2, 1) \text{ または } (3, -2, -1)$$

(2)

以下では $(t, p, q) = (3, 2, 1)$ として考える。このとき、

$$\begin{aligned}(x^2+3)^2 - f(x) &= (2x+1)^2 \\ \Leftrightarrow (x^2+3)^2 - (2x+1)^2 &= f(x)\end{aligned}$$

が成立する。つまり $f(x)=0$ の解と $(x^2+3)^2 - (2x+1)^2 = 0$ の解は一致することになる。

方程式 $(x^2+3)^2 - (2x+1)^2 = 0$ を解くと

$$\begin{aligned}(x^2+3)^2 - (2x+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+3+2x+1)(x^2+3-2x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+2x+4)(x^2-2x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}i, 1 \pm i\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) x = -1 \pm \sqrt{3}i, 1 \pm i$$

【2】

(1)

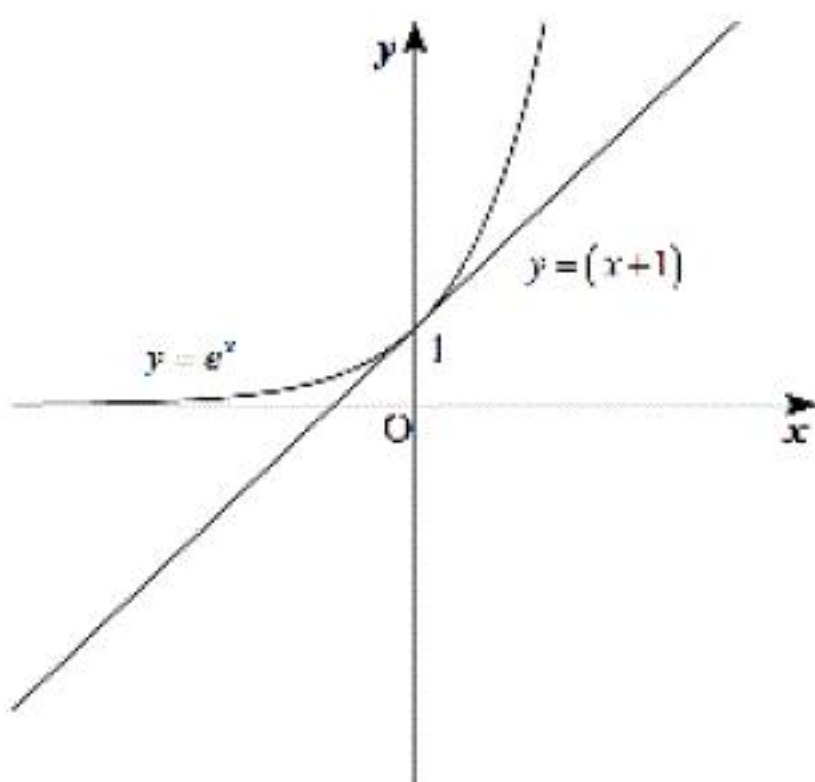
まず $0 \leq e^x - (1+x)$ を証明する。

$y = e^x$ とおくと

$$y' = y'' = e^x$$

が成り立つ。ここで $e^x > 0$ より $y = e^x$ は下に凸の関数である。また $y = (x+1)$ は $(0, 1)$ において

$y = e^x$ と接することから、この2つのグラフの位置関係は下図のようになる。



以上より $e^x \geq x+1$ ，すなわち $0 \leq e^x - (x+1)$ が示せた。

次に $e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$ を示す。

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{2} - e^x + x + 1$$

とおいて、 $f(x) \geq 0$ を示せばよい。

$$f'(x) = \frac{x^2 e^x}{2} + x e^x - e^x + 1$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2 e^x}{2} + x e^x + e^x + x e^x - e^x \\ &= \frac{x^2 e^x}{2} + 2x e^x \\ &= x e^x \left(\frac{x}{2} + 2 \right) \end{aligned}$$

ここで $x \geq 0$ より $f''(x) \geq 0$ となるので、 $f'(x)$ は単調増加関数である。また $f'(0) = 0$ より

$f'(0) \geq 0$ となるので、 $f(x)$ は単調増加関数である。さらに、 $f(0) = 0$ より $f(x) \geq 0$ となる

ので、 $e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$ が示せた。

以上より、題意は示せた。

(証明終)

(2)

[1] $0 < b = a$ のとき

$$(\text{左辺}) = a^n - a^n = 0$$

$$(\text{右辺}) = n(a-a)a^{n-1} = 0$$

より、等号が成立する。

[2] $0 < b < a$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{a^n - b^n}{a - b} &= \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} \\ &< \sum_{k=1}^n a^{n-k} a^{k-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{a^n - b^n}{a - b} &< na^{n-1} \\ \Leftrightarrow a^n - b^n &< n(a-b)a^{n-1} \end{aligned}$$

より、示す不等式の不等号が成立する。

以上[1], [2]より、題意は示せた。

(証明終)

(3)

$\frac{x}{n} \geq 0$ より、(1)で示した不等式に $x = \frac{x}{n}$ を代入すると

$$0 \leq e^{\frac{x}{n}} - \left(\frac{x}{n} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{n} + 1 \leq e^{\frac{x}{n}}$$

となる。また、 $\frac{x}{n} \geq 0$ より

$$0 < \frac{x}{n} + 1 \leq e^{\frac{x}{n}} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここから、

$$0 < \left(\frac{x}{n} + 1 \right)^n \text{かつ} 0 < e^{\frac{x}{n}} \quad \dots \textcircled{2}$$

が言える。ここで

$$e^x - \left(\frac{x}{n} + 1 \right)^n = \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^n - \left(\frac{x}{n} + 1 \right)^n$$

となるので、①より、この式に(2)の結果を適用することができ、

$$\left(e^{\frac{x}{n}} \right)^n - \left(\frac{x}{n} + 1 \right)^n \leq n \left\{ e^{\frac{x}{n}} - \left(\frac{x}{n} + 1 \right) \right\} \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^{n-1}$$

が成り立つ。さらに②より(1)の結果を適用すると

$$n \left\{ e^{\frac{x}{n}} - \left(\frac{x}{n} + 1 \right) \right\} \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^{n-1} \leq n \cdot \frac{\left(\frac{x}{n} \right)^2 \cdot e^{\frac{x}{n}}}{2} \cdot e^{\left(\frac{n-1}{n} \right)x} = \frac{x^2 e^x}{2n}$$

となる。

以上より

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq \frac{x^2 e^x}{2n}$$

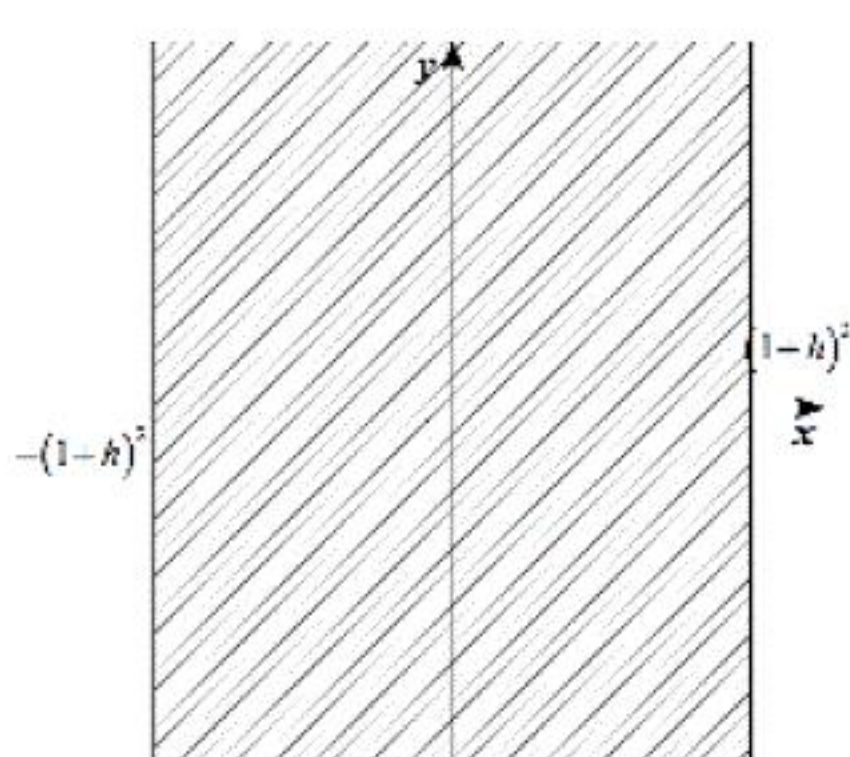
が示せた。

(証明終)

[3]

(1)

$z=1+h$ における R の切り口を考えると, $|x| \leq (1+h)^2$ より, 下図の境界および斜線部になる。

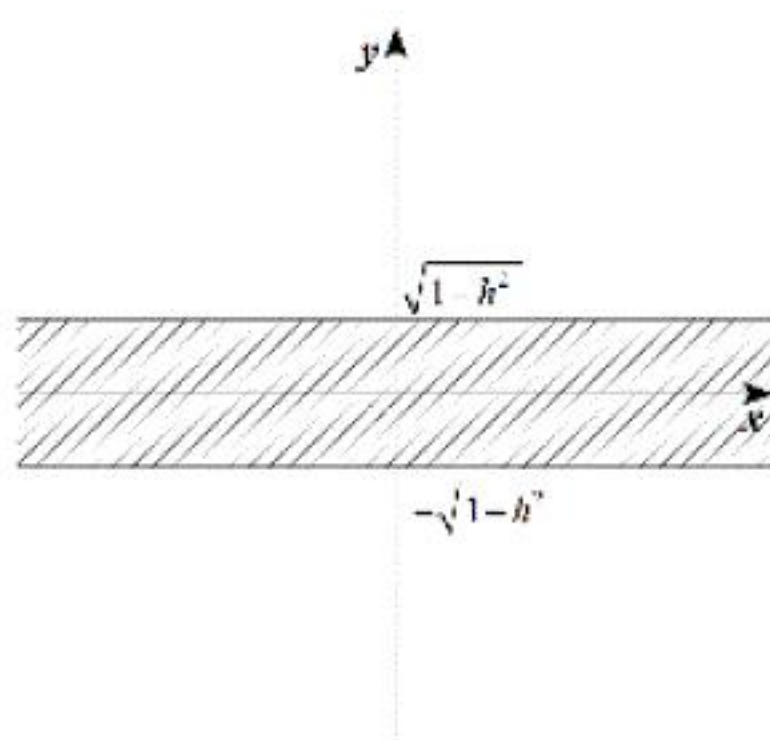


次に $z=1+h$ における C の切り口を考えると

$$y^2 + h^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-h^2} \leq y \leq \sqrt{1-h^2}$$

となる。よって, $z=1+h$ における C の切り口は下図の境界および斜線部になる。



T の断面は上図 2 つの共通部分となるので, 求める面積 $S(h)$ は

$$\begin{aligned} S(h) &= 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2} \\ &= 4(1+h)^2 \sqrt{1-h^2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 4(1+h)^2 \sqrt{1-h^2}$$

(2)

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(h) dh \\ &= 4 \int_{-1}^1 (1+h)^2 \sqrt{1-h^2} dh \\ &= 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-h^2} dh + 8 \int_{-1}^1 h \sqrt{1-h^2} dh + 4 \int_{-1}^1 h^2 \sqrt{1-h^2} dh \end{aligned}$$

となる。ここで $\int_{-1}^1 \sqrt{1-h^2} dh$ は, 半径 1 の円の半円の面積を表すので

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-h^2} dh = \frac{\pi}{2}$$

である。また, $h\sqrt{1-h^2}$ は奇関数であるから,

$$\int_{-1}^1 h\sqrt{1-h^2} dh = 0$$

である。また, $\int_{-1}^1 h^2 \sqrt{1-h^2} dh$ において $h = \cos \theta$ と置換すると

$$\begin{array}{c|c} h & -1 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & \pi \rightarrow 0 \end{array}$$

となり, また $dh = -\sin \theta d\theta$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h^2 \sqrt{1-h^2} dh &= \int_{\pi}^0 \cos^2 \theta \sqrt{1-\cos^2 \theta} (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{8} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

となる。以上の値を

$$V = 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-h^2} dh + 8 \int_{-1}^1 h \sqrt{1-h^2} dh + 4 \int_{-1}^1 h^2 \sqrt{1-h^2} dh$$

に代入すると

$$\begin{aligned} V &= 4 \cdot \frac{\pi}{2} + 8 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5\pi}{2}$$

[4]

(1)

t を実数とすると、直線 L_θ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。 P_θ は L_θ 上の点なので

$$\overrightarrow{AP_\theta} = \begin{pmatrix} 2 - t \cos \theta \\ -t \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくことができる。 $\overrightarrow{AP_\theta} \perp$ 直線 L_θ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 - t \cos \theta \\ -t \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - t \cos \theta) \cos \theta - t \sin^2 \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_\theta} &= 2 \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。ここで点 P_θ の座標を (X, Y, Z) とおくと、

$$\begin{cases} X = 1 + \cos 2\theta \\ Y = \sin 2\theta \\ Z = 0 \end{cases}$$

となり、

$$\begin{aligned} Y^2 &= \sin^2 2\theta \\ &= 1 - \cos^2 2\theta \\ &= 1 - (X - 1)^2 \\ \Leftrightarrow (X - 1)^2 + Y^2 &= 1 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} X = 1 + \cos 2\theta \\ Y = \sin 2\theta \\ Z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (X - 1)^2 + Y^2 = 1 \\ Z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これは xy 平面上で中心 $(1, 0, 0)$ 、半径 1 の円を表す。つまり点 P_θ は、 xy 平面上で、中

心 $(1, 0, 0)$ 、半径 1 の円周上を動く。

(答) 中心 $(1, 0, 0)$ 、半径 1

(2)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP_\theta}| &= \sqrt{4 \cos^4 \theta + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= 2 \cos \theta \quad (\because \cos \theta > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{4 + 1} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。また、 $\overrightarrow{AP_\theta} \perp$ 直線 L_θ より、 $\overrightarrow{AP_\theta} \perp \overrightarrow{OP_\theta}$ であるから、 $\triangle AOP_\theta$ において三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP_\theta}| &= \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OP_\theta}|^2} \\ &= \sqrt{5 - 4 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

となる。よって $\triangle AOP_\theta$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP_\theta}| |\overrightarrow{AP_\theta}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot \sqrt{5 - 4 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{5 \cos^2 \theta - 4 \cos^4 \theta} \\ &= \sqrt{-4 \left(\cos^2 \theta - \frac{5}{8} \right)^2 + \frac{25}{16}} \end{aligned}$$

となる。これは $\cos^2 \theta = \frac{5}{8}$ 、すなわち $\cos \theta = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ($0 \leq \cos \theta$) のとき、最大値 $\frac{5}{4}$ をと

る。また、 $\sin \theta \geq 0$ より、このとき $\overrightarrow{OP_\theta}$ は

$$\overrightarrow{OP_\theta} = 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{4} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4} \right)^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(答) 最大値 $\frac{5}{4}$ 、 $P_\theta \left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0 \right)$

[5]

(1)

(ア) 定義されない

(イ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 4 \\ 7 & -11 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(ウ)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

(エ) 定義されない

$$(答) (ア), (エ) \text{ 定義されない}, (イ) \begin{pmatrix} 11 & -3 & 4 \\ 7 & -11 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, (ウ) \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} C(BA) &= (BA)C \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4\alpha + 12\beta & 8\alpha - \beta \\ 4\gamma + 12\delta & 8\gamma - \delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4\alpha + 8\gamma & 4\beta + 8\delta \\ 12\alpha - \gamma & 12\beta - \delta \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4(3\beta - 2\gamma) & 8\alpha - 5\beta - 8\delta \\ -12\alpha + 5\gamma + 12\delta & 4(2\gamma - 3\beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{8}\beta + \delta \\ \gamma = \frac{3}{2}\beta \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}\beta + \delta & \beta \\ \frac{3}{2}\beta & \delta \end{pmatrix}$$

となる。ここで,

$$\beta = 8\xi, \delta = \eta - \xi$$

とおくと,

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \frac{5}{8}\beta + \delta & \beta \\ \frac{3}{2}\beta & \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \cdot 8\xi + \eta - \xi & 8\xi \\ \frac{3}{2} \cdot 8\xi & \eta - \xi \end{pmatrix} \\ &= \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \eta E + \xi(BA) \end{aligned}$$

となる。以上より題意は示せた。

(証明終)

[6]

(1)

$$\begin{cases} x=2\left(t+\frac{1}{t}+1\right) \\ y=t-\frac{1}{t} \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2 \\ y^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2 \end{cases}$$

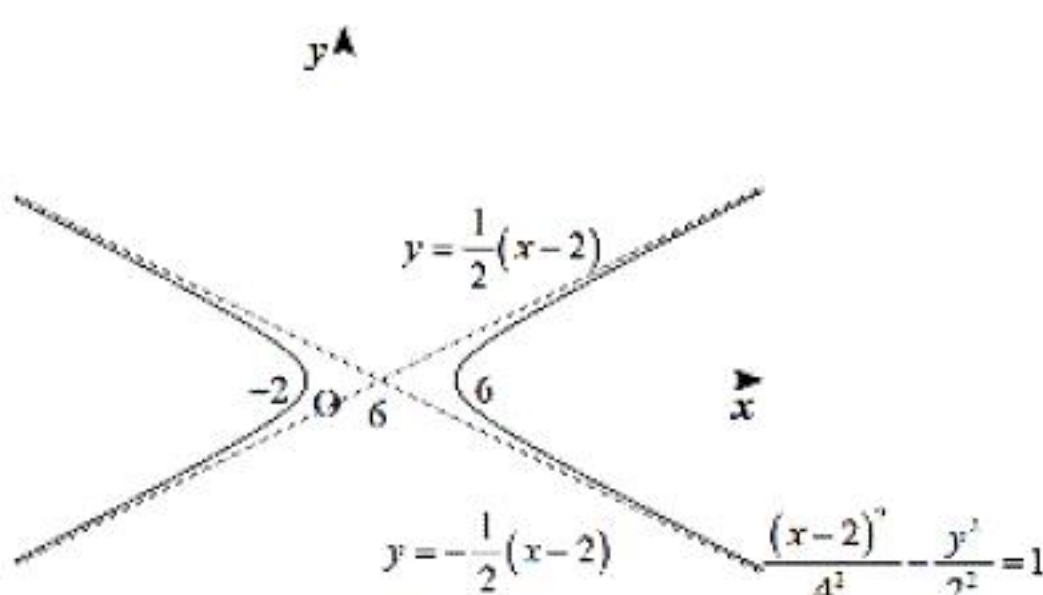
が成り立つ。上記の2式の辺々をひくことにより

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{4}-y^2 &=4 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2} &=1 \end{aligned}$$

を得る。これが曲線Cの方程式である。また漸近線は

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2} &=0 \\ \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{2}(x-2)-y\right\}\left\{\frac{1}{2}(x-2)+y\right\} &=0 \\ \Leftrightarrow y &=\pm\frac{1}{2}(x-2) \end{aligned}$$

となる。よって、曲線Cを図示すると下図のようになる。



(答) $\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

(2)

まずy軸に平行なCの接線を調べる。

[1] $a=-2$ のとき

(1)の図より、 $x=-2$ がCの唯一の接線である。

[2] $a=6$ のとき

(1)の図より、 $x=6$ がCの唯一の接線である。

次に、y軸に平行でないCの接線を調べる。 $(a, 0)$ を通る直線を $y=m(x-a)$ とおく。これを

Cの方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{m^2(x-a)^2}{4} &=1 \\ \Leftrightarrow x^2-4x+4-4m^2(x^2-2ax+a^2) &=16 \\ \Leftrightarrow (1-4m^2)x^2-4(1-2am^2)x-4(3+a^2m^2) &=0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

[1] $(1-4m^2)=0 \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$ のとき

$a\neq 2$ と仮定すると、方程式

$$(1-4m^2)x^2-4(1-2am^2)x-4(3+a^2m^2)=0$$

は1次方程式になり、このとき $y=m(x-a)$ はCと接点ではない交点を持つため、接線とはならず、不適である。 $a=2$ と仮定したときも

$$\begin{aligned} (1-4m^2)x^2-4(1-2am^2)x-4(3+a^2m^2) &=0 \\ \Leftrightarrow 0\cdot x-4 &=0 \end{aligned}$$

となり、成り立たないため、不適である。

[2] $m\neq\pm\frac{1}{2}$ のとき

①は2次方程式であり、これが重解を持つことが $y=m(x-a)$ とCが接することの必要条件である。したがって、①の判別式をDとして、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &=0 \\ \Leftrightarrow 4(1-2am^2)^2-(1-4m^2)\{4(3+a^2m^2)\} &=0 \\ \Leftrightarrow (1-4am^2+4a^2m^4)+(3+a^2m^2-12m^2-4a^2m^4) &=0 \\ \Leftrightarrow (a^2-4a-12)m^2 &=-4 \\ \Leftrightarrow m &=\pm\sqrt{\frac{-4}{(a+2)(a-6)}} \end{aligned}$$

が成り立つことが必要である。このmが実数であり、漸近線の傾きと一致しない条件は

$$\begin{aligned} (a+2)(a-6)<0 \text{ かつ } \pm\sqrt{\frac{-4}{(a+2)(a-6)}} \neq \pm\frac{1}{2} \quad (\text{複合同順}) \\ \Leftrightarrow -2<a<2, 2<a<6 \end{aligned}$$

となる。また、このとき接線の方程式は

$$y=\pm\sqrt{\frac{-4}{(a+2)(a-6)}}(x-a)$$

である。

以上[1],[2]より、求めるaの範囲は

$$-2\leq a<2, 2<a\leq 6$$

となる。また求める接線は

$$\begin{aligned} x &=-2 \quad (a=-2 \text{ のとき}) \\ x &=6 \quad (a=6 \text{ のとき}) \\ y &=\pm\sqrt{\frac{-4}{(a+2)(a-6)}}(x-a) \quad (-2<a<2, 2<a<6 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となる。

(答) aの範囲：

$$-2\leq a<2, 2<a\leq 6$$

接線：

$$\begin{aligned} x &=-2 \quad (a=-2 \text{ のとき}) \\ x &=6 \quad (a=6 \text{ のとき}) \\ y &=\pm\sqrt{\frac{-4}{(a+2)(a-6)}}(x-a) \quad (-2<a<2, 2<a<6 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

〔7〕

(1)

離散型確率変数 X は 2 項分布 $B(100, 2)$ に従う。このとき、平均を m 、標準偏差を σ とおくと

$$m = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 5$$

となる。100 回の独立試行が十分に大きいと考えると、確率変数 X は近似的に正規分布

$N(50, 5)$ に従う。さらに、変換 $Z = \frac{X-50}{5}$ により連続変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に近似

的に従うことを利用して、

$$P(40 \leq X \leq 50)$$

$$= P(50 \leq X \leq 60)$$

$$= P\left(0 \leq \frac{X-50}{5} \leq 2\right)$$

$$= 0.4772$$

となる。よって求める確率 $P(X \leq 40)$ は

$$\frac{1}{2} - 0.4772 = 0.0228$$

となる。

(答) 0.02

(2)

$$P(a < X \leq 50) \geq 0.40$$

$$\Leftrightarrow P(50 \leq X \leq 100 - a) \geq 0.40$$

$$\Leftrightarrow P\left(0 \leq \frac{X-50}{5} \leq \frac{50-a}{5}\right) \geq 0.40$$

$$\Leftrightarrow \frac{50-a}{5} \geq 1.29$$

$$\Leftrightarrow 43.55 \geq a$$

よって条件を満たすような整数 a の最大値は 43 となる。

(答) 43

(3)

(1) で $B\left(100, \frac{2}{5}\right)$, $m = 40$, $\sigma = 2\sqrt{6}$, $N(40, 24)$ $Z = \frac{X-40}{2\sqrt{6}}$ と置き換え、まったく同様に考えると、

$$P(40 \leq X \leq 43)$$

$$= P\left(0 \leq \frac{X-40}{2\sqrt{6}} \leq \frac{3}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$= P\left(0 \leq \frac{X-40}{2\sqrt{6}} \leq 0.612\right)$$

$$= 0.2291$$

となる。よって求める確率は

$$\frac{1}{2} - 0.2291 = 0.2709$$

となる。

(答) 0.27