

[1]

$X = \log_{10} x$, $P = \log_{10} p$, $Q = \log_{10} q$ とおくと

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + (P+Q)X + (PQ+1) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $x > 1$ と $X > 0$ は同値だから、 $\textcircled{1}$ が正の解を持つ条件が求める条件である。

$\textcircled{1}$ は実数解を持つから、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とおいて、

$$D = (P+Q)^2 - 4(PQ+1) = (P-Q)^2 - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |P-Q| \geq 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $\textcircled{1}$ が正の解を持たない条件は

$$\text{「軸 } X = -\frac{P+Q}{2} \text{ が } X \leq 0 \text{ の領域にあって、かつ } PQ+1 \geq 0 \text{ となる。」}$$

である。よって、これの否定

$$\text{「}-\frac{P+Q}{2} > 0 \text{ または、 } PQ+1 < 0 \text{ となる。」}$$

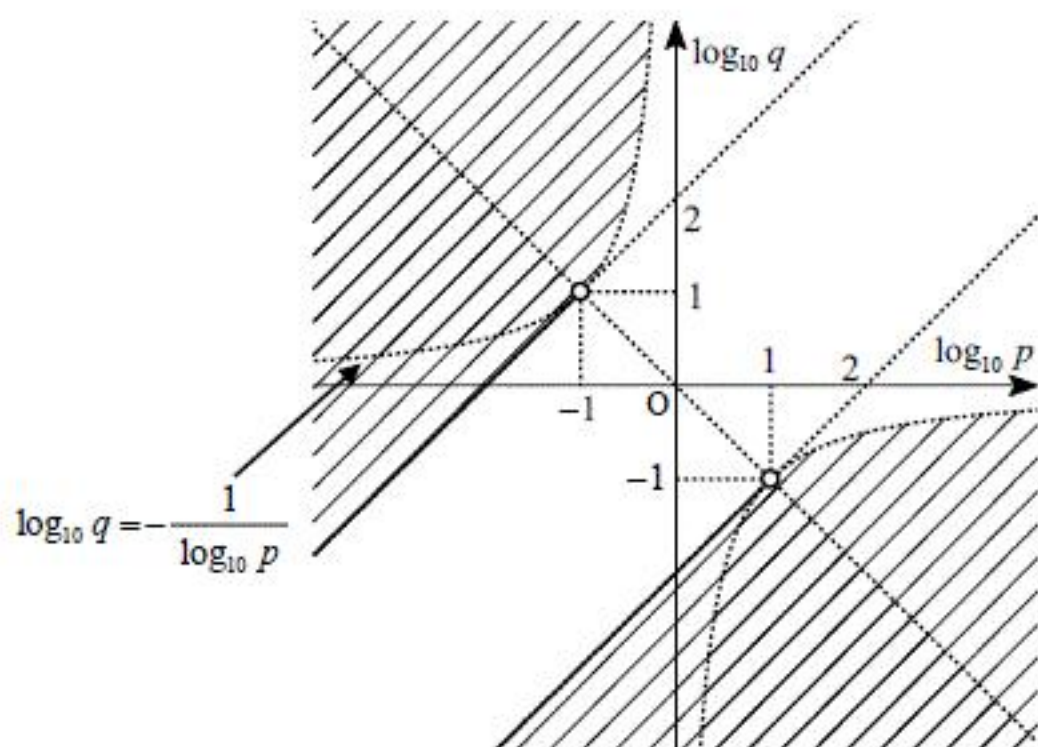
が $\textcircled{1}$ が正の解を持つ条件である。これを变形すると

$$\text{「} P+Q < 0 \text{ または、 } PQ < -1 \text{ となる。」} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。 $\textcircled{1}$ が正の解を持つ条件は、 $\textcircled{2}$ かつ $\textcircled{3}$ であるから

求める領域は次図斜線部である。ただし境界は実線を含み、点線は含まない。

(2点 $(-1, 1)$, $(1, -1)$ を除く)



(答) 前図

[2]

(1)

直線 PQ 上の点はパラメータ s を用いて

$$(1+s(\cos \theta-1), s(2+\sin \theta), 1-s)$$

と書くことができる。この点の z 座標が t であるから、 $s=1-t$ であることがわかり、

$$\begin{cases} \alpha=t+(1-t)\cos \theta \\ \beta=(1-t)(2+\sin \theta) \end{cases}$$

となることがわかる。したがって

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= \{t+(1-t)\cos \theta\}^2+\{(1-t)(2+\sin \theta)\}^2 \\ &= t^2+2t(1-t)\cos \theta+(1-t)^2(5+4\sin \theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha^2+\beta^2=t^2+2t(1-t)\cos \theta+(1-t)^2(5+4\sin \theta)$$

(2)

この立体の体積は $\pi(\alpha^2+\beta^2)$ を 0 から 1 まで t で積分することで計算できる。

よって、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi(\alpha^2+\beta^2) dt = \pi \int_0^1 \{t^2+2t(1-t)\cos \theta+(1-t)^2(5+4\sin \theta)\} dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}t^3 + \left(t^2 - \frac{2}{3}t^3\right)\cos \theta - \frac{1}{3}(1-t)^3(5+4\sin \theta) \right]_0^1 \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos \theta + \frac{1}{3}(5+4\sin \theta) \right\} \\ &= \frac{\pi}{3}(4\sin \theta + \cos \theta + 6) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi}{3}(4\sin \theta + \cos \theta + 6)$$

(3)

上式を変形して

$$V = \frac{\pi}{3}(4\sin \theta + \cos \theta + 6) = \frac{\pi}{3}\{\sqrt{17}\sin(\theta+\gamma)+6\}$$

となる。ただし、 γ は $\tan \gamma = \frac{1}{4}$ を満たす第 1 象限の角とする。 θ を動かしたとき $\sin(\theta+\gamma)$ は

$$-1 \leq \sin(\theta+\gamma) \leq 1$$

の範囲を動くので、 V の最大値と最小値はそれぞれ

$$\text{最大値} : \frac{\pi}{3}(6+\sqrt{17}) \quad \text{最小値} : \frac{\pi}{3}(6-\sqrt{17})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} : \frac{\pi}{3}(6+\sqrt{17}) \quad \text{最小値} : \frac{\pi}{3}(6-\sqrt{17})$$

[3]

(1)

$$\begin{aligned}
 f(t) - g(t) &= \int_1^e \frac{(t^2 - x^2) \log x}{t - x} dx \\
 &= \int_1^e (t + x) \log x dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (t + x)^2 \log x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + 2t + \frac{t^2}{x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} (t + e)^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 + 2tx + t^2 \log x \right]_1^e \\
 &= \frac{1}{2} (t + e)^2 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} + 2et - 2t + t^2 \right\} \\
 &= t + \frac{e^2 + 1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad f(t) - g(t) = t + \frac{e^2 + 1}{4}$$

(2)

$1 \leq x \leq e$ かつ $t > e$ より

$$\frac{x^2 \log x}{t - x} \geq 0$$

となる。ただし、等号成立は $x = 1$ のときのみである。したがって、

$$g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t - x} dx > 0$$

となる。また、問題中の不等式より

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t - x} dx \\
 &\leq \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t - e} dx \\
 &= \frac{1}{t - e} \int_1^e x^2 \log x dx \\
 &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

となる。よって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

となる。

(証明終)

(3)

(1)より

$$\begin{aligned}
 f(t) - \frac{bt^2}{t - a} &= g(t) + f(t) - g(t) - \frac{bt^2}{t - a} \\
 &= g(t) + t + \frac{e^2 + 1}{4} - \frac{bt^2}{t - a} \\
 &= g(t) + \frac{e^2 + 1}{4} - \frac{(b - 1)t^2 + at}{t - a}
 \end{aligned}$$

となる。ここで(2)の結果より $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ だから、求める条件は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(b - 1)t^2 + at}{t - a} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

である。左辺の極限が有限となる条件は、

$$b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

であり、このとき左辺の極限は a となるから

$$a = \frac{e^2 + 1}{4}$$

となる。以上より

$$(a, b) = \left(\frac{e^2 + 1}{4}, 1 \right)$$

となる。

$$(答) \quad (a, b) = \left(\frac{e^2 + 1}{4}, 1 \right)$$

[4]

(1)

すべての自然数 n について

$$a_n - 5b_n = 4$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1^2 - 5b_1^2 = 3^2 - 5 \cdot 1^2 = 4$$

となるので成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つとすると、 $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{k+1}^2 - 5b_{k+1}^2 &= \frac{1}{4} \{ (9a_k^2 + 30a_kb_k + 25b_k^2) - 5(a_k^2 + 6a_kb_k + 9b_k^2) \} \\ &= \frac{1}{4} (4a_k^2 - 20b_k^2) \\ &= a_k^2 - 5b_k^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について $a_n - 5b_n = 4$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

全ての自然数 n について a_n, b_n は自然数かつ $a_n + b_n$ は偶数であることを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 3, b_1 = 1$ より成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(3a_k + 5b_k) = \frac{3}{2}(a_k + b_k) + b_k$$

$$b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + 3b_k) = \frac{1}{2}(a_k + b_k) + b_k$$

となる。ここで、 $a_k + b_k$ は偶数の自然数であり、 b_k は自然数であることから、 a_{k+1}, b_{k+1} はともに自然数である。また、

$$a_{k+1} + b_{k+1} = \frac{1}{2}(4a_k + 8b_k) = 2(a_k + 2b_k)$$

であるので、 $a_{k+1} + b_{k+1}$ は明らかに偶数である。

以上より、 $n=k+1$ でも成り立つ。

[1], [2] より、全ての自然数 n について成立する。

(証明終)

[5]

(1)

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+1 & -a-2 \\ a-2 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -ay \\ ax & y \end{pmatrix}$$

であるから

$$AP = PD$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a+1 & -a-2 \\ a-2 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -ay \\ ax & y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+1 = x \\ -a-2 = -ay \\ a-2 = ax \\ 2a+1 = y \end{cases}$$

第1式を第3式に代入すると

$$a-2 = a(-2a+1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1$$

$a > 0$ より

$$\therefore a = 1$$

となる。これを第1式と第4式に代入して

$$\therefore x = -1, y = 3$$

が求まる。これらの a, x, y は第2式、第3式も満たす。

(答) $a = 1, x = -1, y = 3$

(2)

P は、逆行列を持っているので

$$D = P^{-1}AP$$

がわかる。このとき

$$P^{-1}(A+tE)P = D+tE$$

となる。また、

$$\{P^{-1}(A+tE)P\}^n = P^{-1}(A+tE)^n P$$

が成り立っているので

$$P^{-1}(A+tE)^n P = (D+tE)^n = \begin{pmatrix} (t-1)^n & 0 \\ 0 & (t+3)^n \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $(A+tE)^n = 4E$ を代入すると

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (t-1)^n & 0 \\ 0 & (t+3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} (t-1)^n = 4 \\ (t+3)^n = 4 \end{cases}$$

という関係式が得られる。 n が奇数のとき

$$t-1 = t+3$$

となってしまう、矛盾する。したがって、 n は偶数である。

$t-1 \neq t+3$ であることに注意すれば、このとき

$$t-1 = -(t+3)$$

$$\therefore t = -1$$

となり、このとき n は

$$n = 2$$

となる。以上より求める (t, n) は

$$(t, n) = (-1, 2)$$

である。

(答) $(t, n) = (-1, 2)$

[6]

(1)

点 P, 点 Q における放物線 C の接線をそれぞれ ℓ, m とすると

$$\ell: y = 2tx - t^2$$

$$m: y = 2sx - s^2$$

となるので, これを解いて, ℓ と m の交点 $R(X, Y)$ は

$$(X, Y) = \left(\frac{s+t}{2}, st \right)$$

となる。

$$(答) \quad (X, Y) = \left(\frac{s+t}{2}, st \right)$$

(2)

直線 RP と x 軸がなす角度を α とし, 直線 RQ と x 軸がなす角度を β とすると,

$\tan \alpha = 2t, \tan \beta = 2s$ となる。加法定理より

$$1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2(s-t)}{1+4st}$$

$$\Leftrightarrow 2(s-t) = 1+4st$$

となる。ここで, $s-t < 0$ より $1+4st < 0$ に注意する。

この両辺を 2 乗して(1)の結果を用いると

$$4(s-t)^2 = (1+4st)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(s+t)^2 - 16st = (1+4st)^2$$

$$\Leftrightarrow 16X^2 - 16Y = (1+4Y)^2$$

$$\Leftrightarrow 16X^2 - 16Y^2 - 24Y = 1$$

$$\therefore X^2 - \left(Y + \frac{3}{4} \right)^2 = -\frac{1}{2}$$

となる。ここで, $1+4st < 0$ なので

$$Y < -\frac{1}{4}$$

がわかる。したがって, R は双曲線

$$x^2 - \left(y + \frac{3}{4} \right)^2 = -\frac{1}{2}$$

の下半分の曲線上を動く。

$$(答) \quad x^2 - \left(y + \frac{3}{4} \right)^2 = -\frac{1}{2}$$