

[1] 解答

(1) 加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

より, $\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = 2\sin \theta \cos \theta$, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$ である. よって

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\ &= \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \\ &= \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) - \sin \theta \cdot 2\sin \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta\end{aligned}$$

が成り立つ. (証明終)

(2) $x^3 - 3x + 1$ に $x = 2\cos 80^\circ$ を代入すると,

$$\begin{aligned}&(2\cos 80^\circ)^3 - 3(2\cos 80^\circ) + 1 \\ &= 2(4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ) + 1 \\ &= 2\cos 240^\circ + 1 \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

となり, 確かに解であることが示された. (証明終)

(3) まず, この方程式が重解をもたないことを示す. 重解を持つとすれば, $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ とおいたとき, 重解 $x = a$ に対し $f(a) = f'(a) = 0$ が成り立つ. ところが, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ であるから, $f'(x) = 0$ の解は $x = \pm 1$ であり, これは $f(x) = 0$ を満たさない. よって重解は存在しない. したがって,

$$\alpha, \beta \text{ はともに } 80^\circ \text{ とは異なり, また } \alpha \neq \beta. \quad \cdots (*)$$

(2) と同様に, $x^3 - 3x + 1$ に $x = 2\cos \alpha, 2\cos \beta$ を代入して考えれば,

$$\cos 3\alpha = \cos 3\beta = -\frac{1}{2}$$

であればよく, したがって $3\alpha, 3\beta$ はある整数 k をもちいて,

$$120^\circ + 360^\circ \times k, \text{ または } 240^\circ + 360^\circ \times k$$

の形に書ける. よって

$$\alpha, \beta = 40^\circ + 120^\circ \times k, \text{ または } 80^\circ + 120^\circ \times k$$

である. よって (*) と $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ に注意すると,

$$\alpha = 40^\circ, \beta = 160^\circ \quad \cdots \text{答}$$

[2] 解答

(1)

$$D = \{(x, y, z) | x = 0, y^2 \leq z \leq 4\}$$

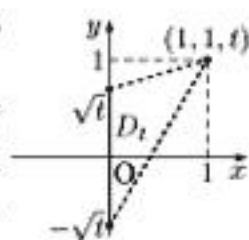
である。 $z = t (0 \leq t \leq 4)$ を固定したとき、不等式 $y^2 \leq t$ の解は、 $-\sqrt{t} \leq y \leq \sqrt{t}$ であるから、

$$D_t = \{(x, y, z) | x = 0, -\sqrt{t} \leq y \leq \sqrt{t}, z = t\}$$

となる。

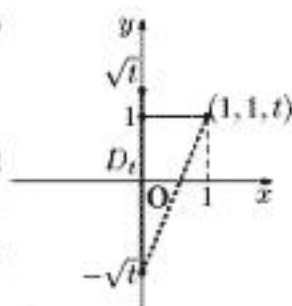
(i) $0 \leq \sqrt{t} < 1$, つまり $0 \leq t \leq 1$ のとき

$z = t$ での xy 平面に平行な断面図は右のようになり、最小は $P(0, \sqrt{t}, t)$ のときで、その値は $\sqrt{1 + (1 - \sqrt{t})^2}$ 。また最大は、 $P(0, -\sqrt{t}, t)$ のときで、その値は $\sqrt{1 + (1 + \sqrt{t})^2}$ 。



(ii) $1 \leq \sqrt{t} \leq 2$, つまり $1 \leq t \leq 4$ のとき

このときは、 $(0, 1, t)$ が D_t に含まれるので、 $(1, 1, t)$ から D_t に垂線を下ろすことが出来る。したがって、そのときの距離 1 が最小となる。また最大は (i) のときと同じく $P(0, -\sqrt{t}, t)$ のとき、 $\sqrt{1 + (1 + \sqrt{t})^2}$ 。



以上まとめて、

$$\text{最大値: } \sqrt{1 + (1 + \sqrt{t})^2}$$

$$\text{最小値: } \begin{cases} \sqrt{1 + (1 - \sqrt{t})^2} & 0 \leq t < 1 \text{ のとき} \\ 1 & 1 \leq t \leq 4 \text{ のとき} \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 各 $z = t$ での切り口は、半径が (1) の最大値である円板から、半径が (1) の最小値である円板をくりぬいたドーナツ型であるから、

(i) $0 \leq t < 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi \{(1 + (1 + \sqrt{t})^2) - (1 + (1 - \sqrt{t})^2)\} \\ &= 4\pi\sqrt{t} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq t \leq 4$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi \{(1 + (1 + \sqrt{t})^2) - 1\} \\ &= \pi(1 + \sqrt{t})^2 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 S(t) dt \\ &= \int_0^1 4\pi\sqrt{t} dt + \int_1^4 \pi(1 + \sqrt{t})^2 dt \\ &= 4\pi \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \pi \left[t + \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} t^2 \right]_1^4 \\ &= \frac{8}{3}\pi + \pi \left(3 + \frac{28}{3} + \frac{15}{2} \right) \\ &= \frac{45}{2}\pi \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

3 解答

(1) f, g の満たす式

$$x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

を x で微分すると,

$$f(x) + xf'(x) - 1 = 2e^{-x}g(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

さらに ① を微分して,

$$\begin{aligned} f'(x) + f'(x) + xf''(x) &= -2e^{-x}g(x) + 2e^{-x}g'(x) \\ \Leftrightarrow f'(x) + f'(x) + xf''(x) &= -2e^{-x}g(x) + 2e^{-x} \cdot e^x f(x) \\ \Leftrightarrow f'(x) + f'(x) + xf''(x) &= -2e^{-x}g(x) + 2f(x) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① + ② より

$$\begin{aligned} f(x) + xf'(x) - 1 + 2f'(x) + xf''(x) &= 2f(x) \\ \Leftrightarrow xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) &= 1 \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

となり, 示すべき式が得られた. (証明終)

(2) $f(x)$ が 2 次以上であると仮定して矛盾することを示す. $f(x)$ の最高次の項を ax^n (ただし, $a \neq 0, n \geq 2$) とおくと, ③ の左辺の n 次の項は,

$$x \cdot anx^{n-1} - ax^n = a(n-1)x^n$$

となるが, 一方で, 右辺は恒等的に 1 であるから, ③ が成り立つためには, $n=1$ でなければならない. これは仮定と矛盾する.

以上により, $f(x)$ は定数または 1 次式である. (証明終)

(3) (i) $f(x)$ が定数のとき

$f'(x) = f''(x) = 0$ であるから, ③ より $f(x) = -1$ である. このとき, 定義より,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^t \cdot (-1) dt \\ &= -[e^t]_0^x \\ &= -e^x + 1 \end{aligned}$$

である. このとき, ① について

$$\begin{aligned} f(x) + xf'(x) - 1 &= -2 \\ 2e^{-x}g(x) &= -2 + 2e^{-x} \end{aligned}$$

となるので, ① が成り立たない. したがって ⑥ も成り立たず不適.

(ii) $f(x)$ が 1 次式のとき

$f(x) = ax + b$ とおくと, ③ より, $(x+2)a - (ax+b) = 1$ だから, $b = 2a - 1$ である. このとき,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^t \{ax + (2a-1)\} dt \\ &= [a(te^t - e^t) + (2a-1)e^t]_0^x \\ &= a(xe^x - e^x) + (2a-1)e^x - (a-1) \\ &= axe^x + (a-1)e^x - (a-1) \end{aligned}$$

であり, したがって ① について,

$$\begin{aligned} x(f(x) - 1) &= x(ax + (2a-1) - 1) \\ &= ax^2 + 2(a-1)x \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt &= 2 \int_0^x e^{-t} (ate^t + (a-1)e^t - (a-1)) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} at^2 + (a-1)t + (a-1)e^{-t} \right]_0^x \\ &= ax^2 + 2(a-1)x + 2(a-1)e^{-x} - 2(a-1) \quad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

④ = ⑤ が成り立つとすれば,

$$\begin{aligned} ax^2 + 2(a-1)x &= ax^2 + 2(a-1)x + 2(a-1)e^{-x} - 2(a-1) \\ \Leftrightarrow 2(a-1)(e^{-x} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

がすべての実数 x に対し成り立つ必要があり, したがって $a=1$ が必要である. そしてこのとき, ④ = x^2 , ⑤ = x^2 となるから, 確かに等式 ⑥ は成り立つ.

以上 (i), (ii) より,

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = xe^x \quad \cdots \text{答}$$

[4] 解答

- (1) 背理法で示す。 $\sqrt{2}$ が有理数であるとし、互いに素な自然数 a, b により $\sqrt{2} = b/a$ と書けたとする。両辺を 2 乗して整理すると $2a^2 = b^2$ 。よって b^2 は偶数であるから、 b も偶数であり、自然数 b' をもちいて、 $b = 2b'$ と書ける。このとき $2a^2 = b^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 4b'^2 \Leftrightarrow a^2 = 2b'^2$ となるから、同様にして a^2 、したがって a が偶数であることになるが、これは a, b が互いに素であるという仮定に矛盾する。以上より、 $\sqrt{2}$ は無理数である。(証明終)

- (2) 次のことが成り立つ:

$$\text{有理数 } a, a', b, b' \text{ に対し, } a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a = a', b = b'$$

実際、 $b \neq b'$ とすると、

$$\sqrt{2} = -\frac{a - a'}{b - b'}$$

となるので、(1) の結果と右辺が有理数であることに矛盾。よって $b = b'$ であり、このとき $a = a'$ である。

さて、

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (5 + \sqrt{2})^{n+1} \\ &= (5 + \sqrt{2})^n (5 + \sqrt{2}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{2})(5 + \sqrt{2}) \\ &= (5a_n + 2b_n) + (a_n + 5b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから、上で示したことを用いると、

$$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + 5b_n \quad \cdots \text{答}$$

- (3) $p \neq -5$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{n+1} + pb_{n+1} &= 5a_n + 2b_n + p(a_n + 5b_n) \\ &= (5 + p) \left(a_n + \frac{2 + 5p}{5 + p} b_n \right) \end{aligned}$$

となるから、 $p = \frac{2 + 5p}{5 + p}$ なる p を求めればよい。これを解くと、 $p = \pm\sqrt{2}$ であり、これは $p \neq -5$ を満たしている。このとき $q = 5 + p = 5 \pm \sqrt{2}$ である。

$$\therefore (p, q) = (\pm\sqrt{2}, 5 \pm \sqrt{2}) \text{ (複号同順)} \quad \cdots \text{答}$$

- (4) (3) の結果より、 $a_n + \sqrt{2}b_n$ は初項 $a_1 + \sqrt{2}b_1 = 5 + \sqrt{2}$ 、公比 $5 + \sqrt{2}$ の等比数列であるから

$$a_n + \sqrt{2}b_n = (5 + \sqrt{2})^n \quad \cdots \text{①}$$

また、 $a_n - \sqrt{2}b_n$ は初項 $a_1 - \sqrt{2}b_1 = 5 - \sqrt{2}$ 、公比 $5 - \sqrt{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - \sqrt{2}b_n = (5 - \sqrt{2})^n \quad \cdots \text{②}$$

よって、 $(\text{①} + \text{②}) \div 2, (\text{①} - \text{②}) \div 2\sqrt{2}$ より、

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \{ (5 + \sqrt{2})^n + (5 - \sqrt{2})^n \} \\ b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (5 + \sqrt{2})^n - (5 - \sqrt{2})^n \} \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

[5] 解答

(1)

$$P_1 = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1-a \end{pmatrix}$$

より,

$$P_1 Q_1 = \sqrt{((a-1)-(a-2))^2 + ((a-2)-(1-a))^2}$$

$$= \sqrt{2(2a^2 - 6a + 5)} \quad \cdots \text{答}$$

(2)

$$A^2$$

$$= \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a-1)^2 + (a-2)^2 & 0 \\ 0 & (a-2)^2 + (a-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= (2a^2 - 6a + 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって帰納的に,

$$A^n = \begin{cases} (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n: \text{偶数} \\ (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix} & n: \text{奇数} \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (i) n が偶数のとき

$$P_n = \begin{pmatrix} (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_n = \begin{pmatrix} 0 \\ (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

となるから, $P_n Q_n^2 = 2(2a^2 - 6a + 5)^n$ となる.(ii) n が奇数のとき

$$P_n = \begin{pmatrix} (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}}(a-1) \\ (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}}(a-2) \end{pmatrix}$$

$$Q_n = \begin{pmatrix} (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}}(a-2) \\ (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}}(1-a) \end{pmatrix}$$

となるから,

$$P_n Q_n^2$$

$$= (2a^2 - 6a + 5)^{n-1} \{ (a-1) - (a-2) \}^2$$

$$+ (2a^2 - 6a + 5)^{n-1} \{ (a-2) - (1-a) \}^2$$

$$= (2a^2 - 6a + 5)^{n-1} (1 + (2a-3)^2)$$

$$= 2(2a^2 - 6a + 5)^n$$

となる.

したがって, いずれの場合についても

$$P_n Q_n = \sqrt{2(2a^2 - 6a + 5)^n}$$

であり, この最小値を求めるには, $2a^2 - 6a + 5$ の最小値について考えればよい. 平方完成すると

$$2a^2 - 6a + 5 = 2 \left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

であるから, 最小値は $\frac{1}{2}$. よって, $P_n Q_n$ の最小値は

$$\sqrt{2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} = \sqrt{2^{1-n}} \quad \cdots \text{答}$$

[6] 解答

(1) 対称性から $a \geq 0$ の場合について考えればよく、また $P(x, y)$ についても $x \geq 0, y \geq 0$ としてよい。

(i) $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ のとき

このときは $P(\sqrt{2}, 0)$ のときに最小であり、 $f(a) = \sqrt{2} - a$ 。

(ii) $\sqrt{2} \leq a$ のとき

(ii-1) $P(\sqrt{2}, 0)$ のとき

このときは $AP = a - \sqrt{2}$ 。

(ii-2) P が $(\sqrt{2}, 0)$ 以外の点のとき

このときの AP の最小値は、 A を中心とする半径 AP の円が点 P で接している状況で起こり、したがって、双曲線の P における接線と、直線 AP は直交している。

双曲線の方程式を x で微分すると、 $x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$ であるから、点 $P(x, y)$ における接線の傾きは、

$$\frac{x}{2y}.$$

また AP の傾きは

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{y}{x-a}$$

だから、直交することから

$$\frac{x}{2y} \cdot \frac{y}{x-a} = -1 \quad \therefore x = \frac{2}{3}a$$

このとき、 $y^2 = \frac{x^2}{2} - 1 = \frac{2}{9}a^2 - 1$ であるから、

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{9}a^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - 1} \end{aligned}$$

となる。

(ii-1) と (ii-2) のどちらで最小値が実現されているのかを考える。(ii-2) が考えられるためには、接点 P の x 座標 $\frac{2}{3}a$

が $\sqrt{2}$ 以上、すなわち $a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ である必要がある。またこの範囲で不等式

$$a - \sqrt{2} \geq \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - 1}$$

を解くと、常に成立することが分かるから、結局 $a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ では (ii-2) で最小値を実現することが分かる。したがって、

$a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ で (ii-1) と (ii-2) が入れ替わることになる。

以上、(i), (ii) と $a < 0$ も含めて考えると、 $f(a)$ は以下のようになる。

$$f(a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - 1} & a \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} - a & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq a \leq -\sqrt{2} \\ a + \sqrt{2} & -\sqrt{2} \leq a \leq 0 \\ \sqrt{2} - a & 0 \leq a \leq \sqrt{2} \\ a - \sqrt{2} & \sqrt{2} \leq a \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - 1} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq a \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 以下のようになる。 …答

