

[1]

(1)

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a$$

$$f(3) = 9 - \frac{9}{2}a$$

であるから

$$f(-1) \leq f(3) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \leq 9 - \frac{9}{2}a$$

これを解いて

$$a \leq \frac{7}{3}$$

となるので、 $a > 0$ と合わせて

$$0 < a \leq \frac{7}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < a \leq \frac{7}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - ax \\ &= x(x-a) \end{aligned}$$

であるから、 $a > 0$ に注意して $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{6}a^3$	↗

極小値は $-\frac{1}{6}a^3$ であるから、これが $f(-1)$ 以下となるのは

$$-\frac{1}{6}a^3 \leq -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \Leftrightarrow a^3 - 3a - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)^2(a-2) \geq 0$$

より、 $a > 0$ に注意して

$$a \geq 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a \geq 2$$

(3)

(i) $0 < a < 3$ のとき $f(x)$ の区間 $-1 \leq x \leq 3$ における増減表は次のようになる。

x	-1	...	0	...	a	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{6}a^3$	↗	$f(3)$

$f(-1)$ と $-\frac{1}{6}a^3$ の大きくない方が最小値であるから、(2)の結果より

最小値は $0 < a < 2$ のとき $f(-1)$ 、 $2 \leq a < 3$ のとき $-\frac{1}{6}a^3$ となる。

(ii) $a \geq 3$ のとき、 $f(x)$ の区間 $-1 \leq x \leq 3$ における増減表は次のようになる。

x	-1	...	0	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	0	↘	$f(3)$

(1)の結果より $a \geq 3$ では $f(-1) > f(3)$ なので、最小値は $f(3)$ となる。

以上をまとめて、最小値は

$$0 < a < 2 \text{ のとき } -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a, \quad 2 \leq a < 3 \text{ のとき } -\frac{1}{6}a^3, \quad a \geq 3 \text{ のとき } 9 - \frac{9}{2}a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < a < 2 \text{ のとき } -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a, \quad 2 \leq a < 3 \text{ のとき } -\frac{1}{6}a^3, \quad a \geq 3 \text{ のとき } 9 - \frac{9}{2}a$$

[2]

(1)

C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とすると

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

より

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

であるから、交点の y 座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。 C_2 と C_3 の交点の x 座標を β とすると

$$\cos \beta = \tan \beta$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta + \sin \beta - 1 = 0$$

より $\sin \beta > 0$ に注意して

$$\sin \beta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

となり交点の y 座標は(上の 2 番目の等式を用いて)

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

となる。 C_3 と C_1 の交点の x 座標を γ とすると

$$\tan \gamma = \sin \gamma$$

$$\Leftrightarrow \sin \gamma = \sin \gamma \cos \gamma$$

$$\Leftrightarrow \sin \gamma (1 - \cos \gamma) = 0$$

より $\gamma = 0$ であるから、交点の y 座標は

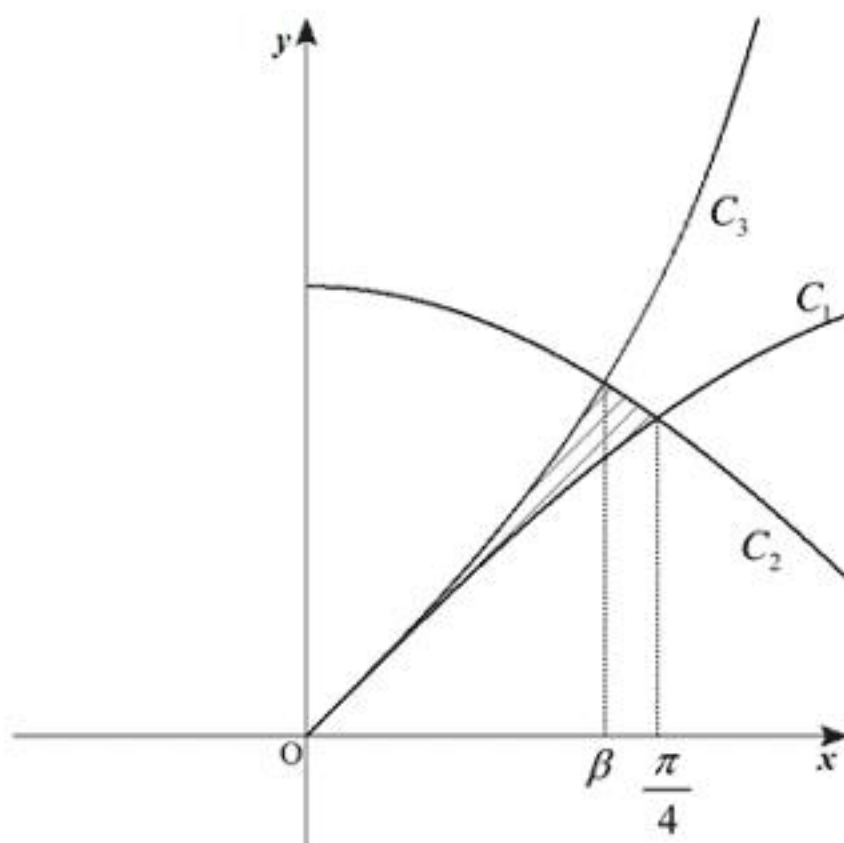
$$0$$

となる。

$$(\text{答}) \left\{ \begin{array}{l} C_1 \text{ と } C_2 \text{ の交点の } y \text{ 座標: } \frac{1}{\sqrt{2}} \\ C_2 \text{ と } C_3 \text{ の交点の } y \text{ 座標: } \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \\ C_3 \text{ と } C_1 \text{ の交点の } y \text{ 座標: } 0 \end{array} \right.$$

(2)

C_1 , C_2 , C_3 のグラフは次のようになる。



これらによって囲まれる図形の面積は

$$\int_0^{\beta} (\tan x - \sin x) dx + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= \left[-\log(\cos x) + \cos x \right]_0^{\beta} + \left[\sin x + \cos x \right]_{\beta}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\log(\cos \beta) - 1 + \sqrt{2} - \sin \beta$$

$$= -\log \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} - 1 + \sqrt{2} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(\text{答}) -\frac{1}{2} \log \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

[3]

(1)

$f(x)$ は単調増加関数であるから、区間 $k-1 \leq x \leq k$ において

$$f(x) \leq f(k)$$

が成り立つ。よって

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k) dx = f(k)$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$\log x$ は単調増加関数であるから、(1)の結果より

$$\int_{k-1}^k \log x dx \leq \log k$$

が成り立つ。よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\int_1^n \log x dx = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log x dx$$

$$\leq \sum_{k=2}^n \log k$$

$$= \log n!$$

となり

$$\int_1^n \log x dx \leq \log n! \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。(この結果は $n=1$ でも成り立つ。)

さらに

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= [x \log x - x]_1^n \\ &= n \log n - n + 1 \\ &= \log n^n e^{1-n} \end{aligned}$$

これを①に代入して、

$$\log n^n e^{1-n} \leq \log n!$$

$$\therefore n^n e^{1-n} \leq n!$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$f(x) = x^n e^{1-x}$ とおくと ($x \geq 0$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} e^{1-x} - x^n e^{1-x} \\ &= x^{n-1} e^{1-x} (n-x) \end{aligned}$$

より $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	n	...
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(n)$	$\searrow$

よって $f(x)$ の最大値は $f(n) = n^n e^{1-n}$ であり、(2)の結果と合わせて

$$f(x) \leq n^n e^{1-n} \leq n!$$

より、任意の実数 $x \geq 0$ に対して $x^n e^{1-x} \leq n!$ が成り立つ。

(証明終)

[4]

(1)

$\overrightarrow{OC} = (a, b)$ とおく。

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ より

$$a = 1$$

となる。また $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ より

$$a \cos \theta + b \sin \theta = 0$$

であるから

$$b = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OC} = \left(1, -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

となる。

$\overrightarrow{OD} = (c, d)$ とおく。

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ より

$$c = 0$$

となる。 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$ より

$$c \cos \theta + d \sin \theta = 1$$

であるから

$$d = \frac{1}{\sin \theta}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OD} = \left(0, \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = \left(1, -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right), \quad \overrightarrow{OD} = \left(0, \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

(2)

$$S_1 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot 1 = \frac{1}{2 \sin \theta}$$

となる。 $S_2 = 2S_1$ が成り立つとき

$$\frac{1}{2 \sin \theta} = \sin \theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$$

となる。 θ の範囲に注意して

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり

$$\theta = 135^\circ$$

となる。このとき

$$S_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 135^\circ, \quad S_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(3)

$$S = 4S_1 + 3S_2 = 2 \sin \theta + \frac{3}{2 \sin \theta}$$

である。今 $\sin \theta > 0$ であるから相加相乗平均の式を用いて

$$S = 2 \sin \theta + \frac{3}{2 \sin \theta} \geq 2\sqrt{3}$$

が成り立ち、等号成立条件は、 θ の範囲に注意して

$$2 \sin \theta = \frac{3}{2 \sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = 120^\circ$$

である。よって S は $\theta = 120^\circ$ のとき最小で、このとき

$$S = 2\sqrt{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 120^\circ, \quad S = 2\sqrt{3}$$

[5]

(1)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = (a+1)x + ay \\ y = 3x + (a+2)y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a(x+y) = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ a = 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}\end{aligned}$$

①より、 $a=0$ または $x+y=0$ 。

[1] $a=0$ のとき、

②に $a=0$ を代入して、

$$3x+y=0$$

ゆえに、 $(x, y) = (t, -3t)$ ($t \neq 0$) とおけば、②が成立することがわかる。

[2] $x+y=0$ のとき、

$(x, y) = (t, -t)$ ($t \neq 0$) とおくと、②に代入して、

$$3t - (a+1)t = 0$$

$$(2-a)t = 0$$

$t \neq 0$ より $a=2$ のとき、これが成り立つ。

以上[1], [2]より $a=0, 2$

(答) $a=0, 2$

(2)

ℓ 上の点を $(t, kt+1)$ とおくと、この点が A により移る点は、

$$\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ kt+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1+ak)t+a \\ (3+ak+2k)t+a+2 \end{pmatrix}$$

であり、これが ℓ 上にあるための条件は

$$(ak+k+ak^2)t+ak+1=(3+ak+2k)t+a+2$$

である。これが任意の t について成り立つことより

$$\begin{aligned}\begin{cases} ak+k+ak^2=3+ak+2k \\ ak+1=a+2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ak^2=k+3 & \cdots \textcircled{3} \\ (k-1)a=1 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。③より $k \neq 0$ なので

$$a = \frac{k+3}{k^2}$$

となる。これを④に代入して

$$(k-1)\frac{k+3}{k^2}=1$$

となりこれを解いて

$$k = \frac{3}{2}, a = 2$$

となる。

(答) $a=2, k=\frac{3}{2}$

(3)

直線 $\ell: y = \frac{3}{2}x+1$ は原点を通らない。

$a=2$ のとき A によりそれ自身に移る点は、(1)より $(t, -t)$ ($t \neq 0$) とかける。これを直線 ℓ の方程式に代入して、

$$-t = \frac{3}{2}t+1 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{5}$$

ゆえに、求める点は $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ である。

(答) $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$

[6]

(1)

ℓ の接点を (α, β) とすると, ℓ は

$$\frac{\alpha}{a^2}x + \frac{\beta}{b^2}y = 1$$

と書ける。これが

$$mx + ny = 1$$

と一致することより

$$m = \frac{\alpha}{a^2}, n = \frac{\beta}{b^2}$$

すなわち

$$\alpha = a^2 m, \beta = b^2 n$$

が成り立つ。 α, β は

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

を満たすので

$$\frac{a^4 m^2}{a^2} + \frac{b^4 n^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore a^2 m^2 + b^2 n^2 = 1 \quad \cdots \text{①}$$

よって, 点 (m, n) の軌跡は楕円である。

(証明終)

(2)

点と直線の距離の公式より

$$\begin{aligned} d_1 d_2 &= \frac{\left| -m\sqrt{a^2 - b^2} - 1 \right|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \cdot \frac{\left| m\sqrt{a^2 - b^2} - 1 \right|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ &= \frac{\left| -m^2(a^2 - b^2) + 1 \right|}{m^2 + n^2} \\ &= \frac{\left| b^2 m^2 + b^2 n^2 \right|}{m^2 + n^2} \\ &= b^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし, (1)の①より $1 - a^2 m^2 = b^2 n^2$ であることを用いた。

(証明終)