

[1] (1) OA の傾きは $\frac{1}{t}$ なので、垂直二等分線の傾きは $-t$. OA の中点は $(\frac{t}{2}, \frac{1}{2})$.
よって求める方程式は

$$\underline{\underline{y = -t\left(x - \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} = -tx + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \cdots \textcircled{1}}}$$

(2) ①より $t^2 - 2xt + 1 - 2y = 0 \cdots \textcircled{2}$. t の範囲は $|t| \geq 1 \cdots \textcircled{3}$.

②, ③を満たす実数 t が存在するような (x, y) の条件を求める.

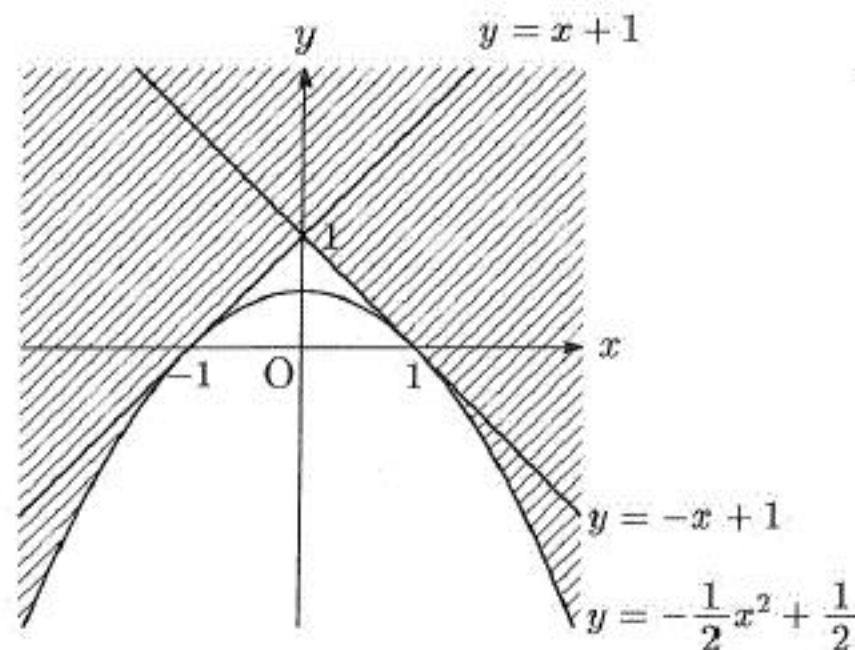
②の左辺を $f(t)$ とおく. $f(t) = (t - x)^2 - x^2 + 1 - 2y$.

図形は y 軸対称なので, $x \geq 0$ で考えれば十分である.

(i) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 条件は $f(1) \leq 0 \iff y \geq -x + 1$.

(ii) $x \geq 1$ のとき, 条件は $-x^2 + 1 - 2y \leq 0 \iff y \geq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

よって, 求める範囲は下図斜線部 (境界を含む).



$$[2] \quad (1) \quad F'_n(x) = 2e^{-(2x)^n} - e^{-x^n} = e^{-2^n x^n} (2 - e^{(2^n-1)x^n}).$$

$$2 - e^{(2^n-1)x^n} = 0 \text{ とすると, } (2^n - 1)x^n = \log 2 \text{ より } x = \left(\frac{\log 2}{2^n - 1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

この値を α とおく.

$e^{-2^n x^n} > 0$, $e^{(2^n-1)x^n}$ は単調増加であることに注意して,

$0 < x < \alpha$ のとき $F'_n(x) > 0$, $x > \alpha$ のとき $F'_n(x) < 0$.

よって $F_n(x)$ は $x = \alpha$ で最大となるので, $a_n = \alpha = \underline{\underline{\left(\frac{\log 2}{2^n - 1} \right)^{\frac{1}{n}}}}$.

$$\begin{aligned} (2) \quad \log a_n &= \frac{1}{n} \log \left(\frac{\log 2}{2^n - 1} \right) = \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\log 2}{1 - 2^{-n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \log \left(\frac{\log 2}{1 - 2^{-n}} \right) - \log 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \log(\log 2) - \log 2 = \underline{\underline{-\log 2}}. \end{aligned}$$

[3] (1) 円 C の中心を P , 円 C と直線 l の交点を x 座標が大きい順に A, B とする.

$$\overrightarrow{PA} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \text{ より } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (\cos \alpha, 0).$$

$$\overrightarrow{PB} = (-\cos \alpha, -\sin \alpha) \text{ より } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = (-\cos \alpha, -2\sin \alpha).$$

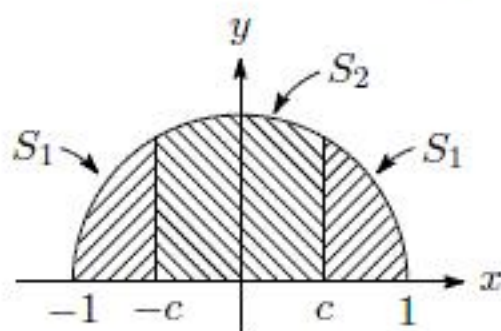
よって, 2 交点の座標は $(\cos \alpha, 0), (-\cos \alpha, -2\sin \alpha)$.

(2) 以下, $\cos \alpha = c, \sin \alpha = s$ と略記する.

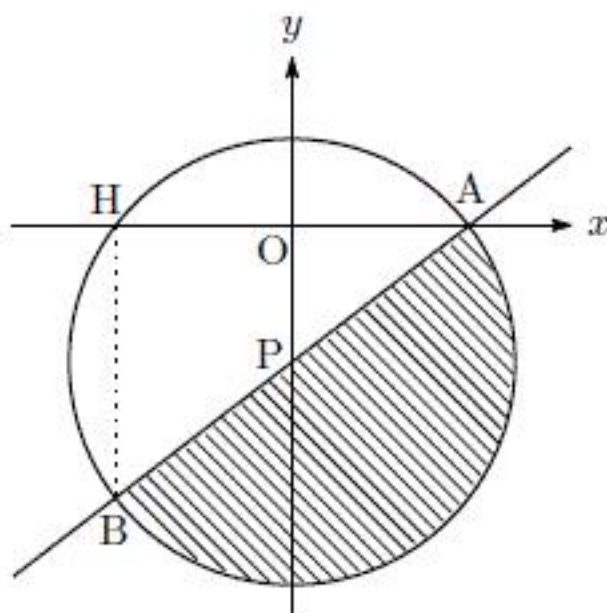
$$S_1 = \int_c^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ と } S_2 = \int_{-c}^c \sqrt{1-x^2} dx \text{ はそれぞれ単位円の上半分の}$$

$c \leq x \leq 1$ と $-c \leq x \leq c$ の部分の面積を表す.

対称性より $-1 \leq x \leq -c$ の部分の面積は S_1 に等しいことに注意して, 与式の左辺 $2S_1 + S_2$ は単位円の上半分の面積を表すので $\frac{\pi}{2}$ に等しい. $\square$



(3) 図形 D は図の斜線部のようになる. B から x 軸に下ろした垂線の足を H とする. $\triangle ABH$ を x 軸のまわりに回転してできる円錐の体積 $V = \frac{8}{3}\pi s^2 c$.



円 C の $y \leq -s$ の部分は $y_1 = -s - \sqrt{1-x^2}$,

$y \geq -s$ の部分は $y_2 = -s + \sqrt{1-x^2}$ と表せるので, 求める体積は

$$\begin{aligned} & \int_{-c}^c \pi y_1^2 dx + \int_c^1 \pi (y_1^2 - y_2^2) dx - V \\ &= \pi \int_{-c}^c (s^2 + 1 - x^2) dx + 2\pi s \left(\underbrace{\int_{-c}^c \sqrt{1-x^2} dx + 2 \int_c^1 \sqrt{1-x^2} dx}_{\frac{\pi}{2}} \right) - V \\ &= \pi \left\{ 2c(s^2 + 1) - \frac{2}{3}c^3 \right\} + 2\pi s \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{8}{3}\pi s^2 c = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi c + \pi^2 s}} \end{aligned}$$

ただし, $\underbrace{\hspace{2cm}}$ の部分で (2) の結果を用いた.

[4] (1) 与漸化式の両辺に $(n+1)(n+2)$ をかけて,

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1} - n(n+1)(n+2)a_n = n+2 - (n+1) = 1$$

より $b_{n+1} - b_n = 1$. これと $b_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_1 = 6$ より, 数列 $\{b_n\}$ は初項 6, 公差 1 の等差数列なので, 一般項は $b_n = n + 5$.

(2) 与式に (1) の結果を代入して

$$(p+q+r)n^2 + (3p+2q+r)n + 2p = n+5$$

これが任意の n について成り立つので, $p+q+r=0$, $3p+2q+r=1$, $2p=5$.
これを解いて, $p = \frac{5}{2}$, $q = -4$, $r = \frac{3}{2}$.

(3) (2) の結果より

$$\frac{5}{2}(n+1)(n+2) - 4n(n+2) + \frac{3}{2}n(n+1) = n(n+1)(n+2)a_n$$

両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割って,

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n+2} = a_n$$

さらに左辺は

$$\frac{5}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)$$

と変形できる. よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{5}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\ &= \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(7n+17)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

[5] (1) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ と $A^2 = 7A - 10E$ より

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} &= A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (7A - 10E) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 7 \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ より求める点は } \underline{\underline{(60, 40)}}. \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より $A \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, $a=4, b=2, c=1, d=3$.

(3) (i) l が y 軸に平行であるとき, $x=k$ とおくと, l 上の点はパラメータ t を用いて (k, t) とかける. この点の A による像は

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k+2t \\ k+3t \end{pmatrix}$$

であり, この点が l 上にあるための条件は $4k+2t=k$.

これが任意の t で成り立つような定数 k は存在しないので, 不適.

(ii) l が y 軸に平行でないとき, $y=mx+n$ とおくと, l 上の点はパラメータ t を用いて $(t, mt+n)$ とかける. この点の A による像は

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t+2mt+2n \\ t+3mt+3n \end{pmatrix}$$

であり, この点が l 上にあるための条件は $t+3mt+3n=m(4t+2mt+2n)+n$, すなわち $(1+3m)t+3n=(4m+2m^2)t+2mn+n$.

これが任意の t で成り立つ条件は, $1+3m=4m+2m^2$ かつ $3n=2mn+n$.

これを解いて $m=\frac{1}{2}$, -1 であり, いずれの場合も $n=0$.

以上より, 求める直線 l は $y=\frac{1}{2}x$ と $y=-x$.

[6] (1) 長軸は $4d$, 短軸は $2\sqrt{3}d$.

(2) $\triangle PAB$ で中線定理より $AP^2 + BP^2 = \underline{\underline{2(OP^2 + d^2)}}$.

これと $AP + BP = 4d$ の平方から, $2(OP^2 + d^2) + 2AP \cdot BP = 16d^2$,
よって, $AP \cdot BP = \underline{\underline{7d^2 - OP^2}}$.

(3) (2) より $AP^3 + BP^3 = (AP + BP)^3 - 3AP \cdot BP(AP + BP)$
 $= (4d)^3 - 3(7d^2 - OP^2) \cdot 4d = -20d^3 + 12d \cdot OP^2$.

(1) より OP の最大値は $2d$, 最小値は $\sqrt{3}d$ であるから,
 $AP^3 + BP^3$ の最大値は $28d^3$, 最小値は $16d^3$ である.