

[1] $\log_{10} x$ を $\log x$ と略記する.

与方程式の実数解は, $y = |\log x|$ と $y = px + q$ の共有点の x 座標に等しい.
共有点を x 座標の小さい順に C, D, E とし, C の x 座標を t とおく.

$\frac{1}{2} < t < 1$ に注意して, 各点の座標は $C(t, -\log t), D(2t, \log 2t), E(3t, \log 3t)$ であるから, CD の傾きは

$$\frac{\log 2t - (-\log t)}{2t - t} = \frac{\log 2t^2}{t} \quad \dots \textcircled{1}$$

DE の傾きは

$$\frac{\log 3t - \log 2t}{3t - 2t} = \frac{\log \frac{3}{2}}{t} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$ より

$$\log 2t^2 = \log \frac{3}{2} \quad \therefore 2t^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

直線 CDE の式は

$$y = \frac{\log \frac{3}{2}}{t}(x - t) - \log t = \frac{\log \frac{3}{2}}{t}x - \log \frac{3}{2} - \log t$$

よって,

$$p = \frac{\log \frac{3}{2}}{t} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\log 3 - \log 2) = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{3}}(B - A)}}$$

$$q = -\log \frac{3}{2} - \log t = -\log \frac{3}{2} - \log \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\log 2 - \frac{3}{2}\log 3 = \underline{\underline{2A - \frac{3}{2}B}}$$

(注) 与方程式が 3 つの解をもつとき, 最小解は 1 より小, 残りの 2 解は 1 より大であることが, グラフから図形的に分かるので, (II) の条件がなくても結果は変わらない.

$$[2] \quad (1) \quad y = \frac{1}{x+2} \text{ より } y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\text{よって, } l_1 \text{ は } \underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}}$$

(2) l_n は

$$y = -\frac{1}{(x_n+2)^2}(x-x_n) + \frac{1}{x_n+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$y=0$ として

$$0 = -\frac{1}{(x_n+2)^2}(x-x_n) + \frac{1}{x_n+2}$$

両辺に $(x_n+2)^2$ をかけて

$$0 = -(x-x_n) + (x_n+2) \quad \therefore x = 2x_n+2$$

$$\text{よって, } \underline{\underline{x_{n+1} = 2x_n + 2}}$$

$x_{n+1}+2 = 2(x_n+2)$ より, 数列 $\{x_n+2\}$ は公比 2, 初項 $x_1+2=2$ ($\because x_1=0$) の等比数列であるから,

$$x_n+2 = 2^n \quad \therefore \underline{\underline{x_n = 2^n - 2}}$$

(3) l_n の x 切片は $x_{n+1} = 2^{n+1} - 2$

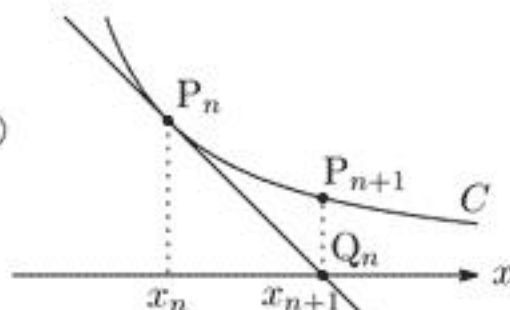
①より, l_n の y 切片は

$$\frac{x_n}{(x_n+2)^2} + \frac{1}{x_n+2} = \frac{2x_n+2}{(x_n+2)^2} = \frac{2(2^n-2)+2}{(2^n)^2} = \frac{2^{n+1}-2}{4^n}$$

よって,

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot (2^{n+1} - 2) \cdot \frac{2^{n+1} - 2}{4^n} = \underline{\underline{\frac{2(2^n - 1)^2}{4^n}}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$

であるから, $\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2}}$



[3] (1) PQ の延長と x 軸の交点を R とする.

$\triangle RPA$, $\triangle RQB$ を x 軸の回りに回転してできる円錐の体積をそれぞれ V_1 , V_2 とすると,
 $PA : QB = 1 : 2$ より,

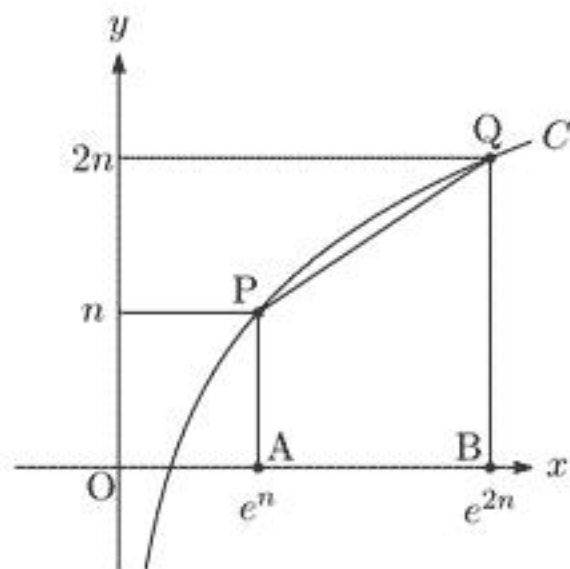
$$V_1 : V_2 = 1^3 : 2^3 = 1 : 8$$

$RA = AB = e^{2n} - e^n$ より,

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi n^2 (e^{2n} - e^n)$$

よって,

$$V(n) = V_2 - V_1 = 7V_1 = \underline{\underline{\frac{7}{3} \pi n^2 (e^{2n} - e^n)}}$$



$$(2) S(n) + V(n) = \pi \int_{e^n}^{e^{2n}} (\log x)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= \int (x)' (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2(x \log x - x) + (\text{積分定数}) \end{aligned}$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \int_{e^n}^{e^{2n}} (\log x)^2 dx &= \left[x \{ (\log x)^2 - 2 \log x + 2 \} \right]_{e^n}^{e^{2n}} \\ &= e^{2n} (4n^2 - 4n + 2) - e^n (n^2 - 2n + 2) \end{aligned}$$

(1) の結果と合わせて,

$$\begin{aligned} \frac{S(n) + V(n)}{V(n)} &= \frac{e^{2n} (4n^2 - 4n + 2) - e^n (n^2 - 2n + 2)}{\frac{7}{3} n^2 (e^{2n} - e^n)} \\ &= \frac{4 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{e^n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{\frac{7}{3} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{7}{3}} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{S(n)}{V(n)} = \frac{S(n) + V(n)}{V(n)} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{12}{7} - 1 = \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$$

$$[4] \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(1) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

より, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$ $\square$

$$(2) \quad \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{OH} \perp$ 平面 ABC より $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BC}$ であるから, $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

また, (1) より $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

よって, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるから, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

同様にして, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ $\square$

$$(3) \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{OA}|^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 + 2^2 = 6$$

よって, $\underline{\underline{AB = \sqrt{6}}}$

同様に, $\underline{\underline{BC = CA = \sqrt{6}}}$ であるから, $\triangle ABC$ は正三角形である.

これと $OA = OB = OC$ より, H は正三角形 ABC の重心であるから,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

よって,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OH}|^2 &= \frac{1}{9} \left(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{1}{9} (2^2 + 2^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 2 \end{aligned}$$

より, $\underline{\underline{OH = \sqrt{2}}}$

(注) $OA = OB = OC$ より, 直角三角形 OAH , OBH , OCH はすべて合同なので, $AH = BH = CH$. よって, H は $\triangle ABC$ の外心であり, $\triangle ABC$ は正三角形なので, 重心でもある.

[5] (1) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ であり, ケーリー・ハミルトンの定理から,

$$A^2 - 2 \cos \theta A + E = O \quad \dots \textcircled{1}$$

また, 与条件より

$$A^2 - A + E = O \quad \dots \textcircled{2}$$

① - ② より, $(1 - 2 \cos \theta)A = O$

$A \neq O$ より, $1 - 2 \cos \theta = 0 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$

$$0 < \theta < \pi \text{ より, } \underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{3}}}, \quad \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

(2) $y = (\tan \varphi)x$ に関する対称移動を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$ である.

$$\text{いま } \tan \varphi = \sqrt{3} \text{ より } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ として, } \underline{\underline{B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

(3) $B^{-1} = B$ に注意して, $BC = A$ より,

$$C = B^{-1}A = BA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$k = \tan \varphi$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) とおくと, $C = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$ であるか

ら, 成分比較して $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$-\pi < 2\varphi < \pi \text{ より } 2\varphi = \frac{\pi}{3} \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \underline{\underline{k = \frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

(注) $y = (\tan \varphi)x$ に関する対称移動は, 原点中心 $-\varphi$ 回転, x 軸対称移動, 原点中心 φ 回転の合成変換であるから, 表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & 2sc \\ 2sc & s^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

(ただし, $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$) であり, 倍角公式から上記のものを得る.

$$[6] \quad C: x^2 - y^2 = 1, \quad H: x^2 - y^2 = -1, \quad l: sx - ty = 1$$

$$(1) \quad P(s, t) \text{ は } H \text{ 上にあるので, } s^2 - t^2 = -1 \dots \textcircled{1}$$

l が P を通ると仮定すると, $s^2 - t^2 = 1$ が成り立つが, これは $\textcircled{1}$ に反する. よって, l は P を通らない. $\square$

$$(2) \quad t \neq 0 \text{ に注意して, } l \text{ の式から } y = \frac{sx-1}{t} \dots \textcircled{2}$$

$$\text{これを } x^2 - y^2 = 1 \text{ に代入して, } x^2 - \left(\frac{sx-1}{t}\right)^2 = 1$$

$$t^2x^2 - (s^2x^2 - 2sx + 1) = t^2 \quad \therefore (t^2 - s^2)x^2 + 2sx - 1 - t^2 = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より } t^2 - s^2 = 1 \text{ なので,}$$

$$x^2 + 2sx - (t^2 + 1) = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ の判別式を } D \text{ とすると,}$$

$$D/4 = s^2 + t^2 + 1 > 0$$

より $\textcircled{3}$ は異なる2つの実数解をもつ. $\textcircled{3}$ の解は

$$x = -s \pm \sqrt{s^2 + t^2 + 1} = -s \pm \sqrt{2t^2} \quad (\because \textcircled{1}) = -s \pm \sqrt{2}t$$

$\textcircled{2}$ より, 複号同順で

$$\begin{aligned} y &= \frac{s(-s \pm \sqrt{2}t) - 1}{t} = \frac{-s^2 \pm \sqrt{2}st - 1}{t} = \frac{-t^2 \pm \sqrt{2}st}{t} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -t \pm \sqrt{2}s \end{aligned}$$

よって, l と C は異なる2点で交わる.

$$Q(-s+\sqrt{2}t, -t+\sqrt{2}s), R(-s-\sqrt{2}t, -t-\sqrt{2}s) \text{ としてよく, } \underline{\underline{G\left(-\frac{s}{3}, -\frac{t}{3}\right)}}$$

$$(3) \quad \triangle GQR = \frac{1}{3} \triangle PQR \text{ より, } \triangle PQR \text{ の面積が一定であることを示せばよい.}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-2s + \sqrt{2}t, -2t + \sqrt{2}s), \quad \overrightarrow{PR} = (-2s - \sqrt{2}t, -2t - \sqrt{2}s) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \frac{1}{2} \left| (-2s + \sqrt{2}t)(-2t - \sqrt{2}s) - (-2t + \sqrt{2}s)(-2s - \sqrt{2}t) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| 4\sqrt{2}(s^2 - t^2) \right| \\ &= 2\sqrt{2} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となり一定. $\square$